И.Н.Сергеев

1000 ВОПРОСОВ И ОТВЕТОВ. МАТЕМАТИКА:

Учебное пособие для поступающих в ВУЗы

2-е изд. - М.: «Книжный дом «Университет», 2001. — 208с.

Пособие представляет собой сборник задач по всему курсу математики (включая алгебру, геометрию и начала анализа) и предназначено для подготовки к вступительному экзамену по математике в любой вуз. Специальный порядок задач, разработанный опытным преподавателем, обеспечивает максимальный обучающий эффект. При последовательном изучении материала абитуриент развивается по спирали: пройдя очередной ее виток, он оказывается подготовленным по всем разделам математики на существенно более высоком уровне, чем раньше.

Прилагаются варианты письменных вступительных экзаменов по математике в МГУ им. М. В.Ломоносова, проводившихся в 1999г., а также программа по математике для поступающих в МГУ.

Для старшеклассников и учителей, абитуриентов и репетиторов.

Оглавление

Введение

Вы держите в руках оригинальный сборник задач, предназначенный для подготовки к письменному вступительному экзамену по математике в любой вуз. Этот задачник принципиально отличается от *всех* пособий подобного типа. Он позволяет абитуриенту полностью, причем самостоятельно (или с помощью консультанта — это зависит от способностей самого абитуриента) подготовиться к экзамену за сравнительно небольшой срок: от двух–трех недель до одного года. Разумеется, книгу может использовать и учитель математики, черпая из нее материал для проведения уроков или контрольных работ.

1. Уникальность настоящего сборника

1. Задачный материал книги расположен именно в таком порядке, в каком его на самом деле должен проходить абитуриент, повторяя уже знакомые разделы математики и изучая еще не пройденные. Основная идея расположения, принадлежащая автору задачника и оправдавшая себя в многолетней практике, состоит в том, что *подготовка к экзамену должна происходить как-бы по спирали.* Пройдя очередной виток такой спирали, абитуриент переходит на следующий уровень и оказывается подготовленным на порядок лучше, чем раньше. Более того, уже после прохождения начального витка он в определенной степени готов к экзамену, причем по всем разделам программы (это особенно важно в случае проведения вузом досрочных вступительных испытаний).

В стандартных пособиях для поступающих в вузы разные разделы математики проходятся последовательно, в более

или менее общепринятом порядке, в результате чего абитуриент, основательно изучив и отработав одни темы, не успевает иногда даже познакомиться с другими, не менее важными, но стоящими почему-то в конце списка (обычно такая роль отводится геометрии, до которой, как правило, так дело и не доходит). Этого недостатка лишен предлагаемый курс.

2. Настоящее пособие включает в себя *полный курс* подготовки по математике, охватывающий все типы задач, а также те идеи и методы их решения, которые реально встречаются на письменных вступительных экзаменах. Здесь нет искусственных задач, придуманных специально для демонстрации каких-либо экзотических приемов, никогда не предлагавшихся абитуриентам.

В основу сборника легли задачи из вариантов вступительных экзаменов, проводившихся в прошлые годы (начиная с 1977 г.) на различных факультетах МГУ им. М. В. Ломоносова. Они представляют собой результат коллективного труда высококвалифицированных математиков механико-математического факультета, факультета вычислительной математики и кибернетики, а также физического факультета. В сборник вошли наиболее ценные, содержательные и поучительные, по мнению автора, задачи, проверяющие не только подготовку абитуриента, но и его умение мыслить в нестандартной, порой совершенно неожиданной математической ситуации. Тексты многих задач сознательно изменены автором как для унификации их формулировок, так и для усиления тех или иных методических эффектов.

3. Предлагаемый задачник выделяется из огромной массы подобных изданий *относительной краткостью*, что в сочетании с полнотой делает его особенно актуальным для абитуриентов, имеющих не очень большой запас времени. Наблюдения последних лет показывают, что старше-

классники, готовящиеся к поступлению в вуз, как правило, находятся в сильном цейтноте из-за страшной перегрузки, создаваемой совместными усилиями родителей, учителей и репетиторов (и успешно подогреваемой обязательной школьной программой).

Многие считают, что лучший способ подготовиться к вступительному экзамену — прорешать как можно больше задач, пусть однотипных и несложных, зато позволяющих абитуриенту набить руку и довести до автоматизма применение стандартных приемов. Такой способ, ввиду дефицита времени, хорош только тем, что не создает дополнительных проблем преподавателю. Куда полезнее предложить поступающему не слишком изнурительную для него подборку разнообразных задач, в которой каждая следующая задача развивает предыдущую и заставляет его припомнить кое-что из пройденного ранее материала! Именно эту цель и преследовал автор настоящего сборника.

2. Структура книги

Книга состоит из двух частей, содержащих в общей сложности ровно 1000 задач. К ним прилагается программа по математике для поступающих в МГУ им. М. В. Ломоносова, отдельно собраны задачи из не входящих в эту программу (дополнительных) разделов математики, публикуются варианты вступительных экзаменов в МГУ, проводившихся в 1999 г. Все задачи пронумерованны подряд, а ответы к ним помещены в конце книги.

3. Несколько слов о фундаментальных задачах

Первая часть сборника, состоящая из двух глав, представлена *простейшими задачами*, элементарными составляющими, из которых, как из кирпичиков, впоследствии скла-

дываются более сложные задачи. Наряду с алгеброй, сюда входит и геометрия, которая, в отличие от традиционного ее местоположения, пронизывает весь предлагаемый курс и органично вплетается в другие его разделы. Задачи первой главы требуют лишь самых примитивных знаний и навыков, незатейливых рассуждений и выкладок, однако умение их решать совершенно необходимо для дальнейшего. Вторая глава посвящена квадратным уравнениям и неравенствам, в ней закрепляются и развиваются первичные понятия, факты и приемы, с которыми читатель знакомился на протяжении первой главы. Таким образом, первая часть книги — это *базовый* уровень, нулевой (не первый!) виток спирали, о которой говорилось выше.

Особого разговора заслуживают логарифмы и сопутствующий им материал, который, согласно обычной школьной программе, проходится лишь в 11-м классе и к тому же далеко не с начала учебного года. Если подождать, пока эта тема будет пройдена в школе, то, вероятнее всего, она просто выпадет из системы подготовки к вступительному экзамену и в результате так и не будет усвоена поступающим в требуемой степени, от чего могут выиграть только его потенциальные конкуренты. Имеет смысл досрочно (возможно, самостоятельно) пройти логарифмы прямо по школьному учебнику или по любой другой литературе. Предполагается, что именно так и поступит читатель, работающий с данным задачником.

4. Краткое описание генеральных методов

Вторая часть сборника разбита на четыре главы, которые соответствуют, по классификации автора, четырем уровням подготовки к экзамену, четырем глобальным методам решения математических задач. Вообще-то, это даже не ме-

тоды, а, скорее, наиболее общие типы рассуждений. Да и деление задач на классы по этому признаку носит весьма и весьма условный характер.

1. *Метод перебора* представляет первый уровень подготовки — *разветвленный*. Идея перебора случаев стара, как мир, и применима к широкому классу задач. Довольно часто приходится рассуждать по-разному в зависимости от каких-либо обстоятельств: от знака величины, стоящей под модулем, от знаков левой и правой части уравнения или неравенства при возведении в квадрат, от того, равен или не равен нулю коэффициент при неизвестной, и т. п. Отдельное исследование каждого из возникающих случаев как раз и составляет суть метода перебора.

2. *Метод равносильных преобразований* подробно изучается на следующем, *продвинутом* уровне. Он, конечно же, применялся и в предыдущих разделах пособия, но теперь, поскольку задачи становятся более сложными, он раскрывается в полном объеме, рассматривается с разных позиций, а его приложения оказываются более серьезными. В основе метода равносильных преобразований лежит переход от начальной задачи к некоторой новой, в определенном смысле более простой и, что самое главное, равносильной исходной. К этой, преобразованной задаче впоследствии и адресуется изначально поставленный вопрос. Без такого подхода бывает особенно трудно обойтись при решении задач с параметрами.

3. *Метод обозначений* поднимает абитуриента на еще более высокий, *творческий* уровень. Название этого метода ассоциируется, прежде всего, с введением новой переменной, что представляет собой лишь вершину айсберга. Автор понимает метод обозначений *в более широком смысле*, а именно, как метод обогащения задачи, например, добавлением новых переменных или функций, привлечением гра-

фических иллюстраций, дополнительными построениями в геометрии и другими проявлениями математической изобретательности. Иными словами, задача наделяется более богатой и содержательной структурой и с ее помощью исследуется более просто, а полученные в итоге выводы затем истолковываются в исходных терминах.

4. *Метод следствий* относится к заключительному, *утонченному* уровню подготовки абитуриента. Необходимость в его применении возникает тогда, когда рассуждать равносильно нет воможности или надобности. В такой ситуации для начала можно попытаться вывести из условия хоть какие-нибудь следствия, заметить или угадать хоть что-нибудь полезное, а затем, при удачном исходе, довести решение до логического конца. Разумеется, для этого потребуется повышенная наблюдательность или изощренность в рассуждениях, но вполне возможно, что на эти качества абитуриента и был расчет.

5. Обозначения

Непосредственно после номера задачи в скобках указано, на каком факультете и в каком году она предлагалась, а также, какой по счету шла в варианте. При этом год обозначен лишь двумя последними цифрами, а факультет — греческой буквой в соответствии со следующим перечнем (названия факультетов, их отделений и специальностей даны по состоянию на 1999 г.):

μ — механико-математический факультет;

$\varkappa$ — факультет вычислительной математики и кибернетики;

ζ — физический факультет;

χ — химический факультет;

β — биологический факультет и факультет фундаментальной медицины;

π — факультет почвоведения;

λ — геологический факультет;

γ — географический факультет;

φ — филологический факультет (специальность "прикладная лингвистика");

ε — экономический факультет;

ψ — факультет психологии;

α — институт стран Азии и Африки (социально-экономическое отделение);

σ — социологический факультет.

К примеру, задача, начинающаяся записью "**12***. (μ – 86.2) ...", идет в сборнике под номером 12 и давалась второй по счету в варианте механико-математического факультета в 1986 г. Кроме того, она отмечена звездочкой, что означает бóльшую ее трудность среди задач данного подраздела (конечно, неотмеченные задачи из других параграфов могут оказаться куда более трудными).

6. Как пользоваться задачником

В заключение, дадим несколько советов читателю, решившему использовать настоящий задачник для подготовки к вступительному экзамену:

1) если у Вас достаточно времени на подготовку, решайте все задачи подряд — ведь каждая следующая задача предполагает умение решать какие-то из предыдущих;

2) если Ваш ответ хотя бы отчасти не совпал с приведенным в конце книги (не совпал по существу, а не по форме), то обязательно разберитесь в причине этого несовпадения: найдите ошибку, изучите механизм ее появления и приду-

майте такой способ решения, который исключает подобные ошибки в принципе;

3) если у Вас не получается задача, отмеченная звездочкой, то не отчаивайтесь — гораздо важнее, чтобы получились остальные, обязательные задачи;

4) если Ваш ответ оказался правильным, то это хороший признак, но все же припомните название раздела, в котором находится данная задача, и убедитесь в том, что метод Вашего решения соответствует этому названию, а если это не так, то постарайтесь решить ту же задачу соответствующим методом;

5) если Вы получили правильный ответ, то проанализируйте текст Вашего решения: он должен служить доказательством правильности ответа, и лучше, если такой текст у Вас получается автоматически или после незначительного редактирования, а не в результате переписывания начисто.

Желаем успехов!

Часть I

Фундаментальные задачи

Первичные понятия, факты и приемы

1 Элементарные сведения

1.1 Преобразование выражений

1. (ψ – 84.1) Вычислить

$$\left(\frac{928\cdot 10^{-2}}{0{,}8}-0{,}6\right):\left(\frac{(42\cdot 3\frac{5}{6}+3{,}3:0{,}03):\frac{1}{15}}{(3\frac{3}{4}:0{,}625-0{,}84:0{,}8):0{,}03}\right)^{-1}.$$

2. (π – 96.1) Вычислить

$$((\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27})^2+7)((\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27})^2-7).$$

3. (λ – 98.1) Вычислить

$$\left(\frac{9a^2-16b^2}{3a+4b}-\frac{a^2b-3ab^2}{ab}\right)^2:\left(6ab-\frac{8a^3-b^3}{2a-b}\right).$$

4. (π – 98.1) Вычислить

$$\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{\frac{2b}{a}}-\sqrt{\frac{8a}{b}}\right).$$

1.2 Модуль и знак числа, допустимые значения

5. (ζ – 83.2) Решить уравнение $|5x^2-2|=3$.

6. (ζ – 96.3) Решить двойное неравенство

$$-1<|x^2-9|<27.$$

7. (λ – 97.1) Решить неравенство

$$\sqrt{|x+1|-1}>\sqrt{|x+1|-97}.$$

8. (ζ – 86.2) Решить неравенство $x - 1 > \dfrac{4x}{3 - x}$.

9. (σ – 97.1) Решить неравенство $\dfrac{x^2 + 1}{x} < \dfrac{1}{x} + 1$.

10. (γ – 97.1) Решить неравенство
$$\frac{|x-1| + 10}{4|x-1| + 3} > 2.$$

11. (χ – 93.1) Решить неравенство $\dfrac{9}{(x-1)^2} \geqslant 1$.

12*. (μ – 86.2) Решить неравенство $f(f(x)) \geqslant (f(x))^2$, где $f(x) = 2x^2 - 1$.

1.3 Отбрасывание оснований степени

13. (ζ – 95.1) Решить уравнение $2^{x-1} \cdot 3^x = 0{,}5 \cdot 6^{4-x}$.

14. (λ – 97.4) Решить неравенство $(\frac{2}{3})^{2x^2} > (2{,}25)^{x^2-10}$.

15. (ζ – 82.4) Решить неравенство
$$2^{x+2} - 5^{x-1} < 7 \cdot 2^{x-3} - 3 \cdot 5^{x-2}.$$

16*. (ζ – 98.3) Решить неравенство
$$2^{\frac{2x+7}{2}} - 3^{2x-1} > 9^x - 2^{\frac{2x+1}{2}}.$$

1.4 Понятие логарифма

17. (π – 90.1) Решить неравенство $2 - 3^{x-2} > 3^{x-1}$.

18*. (π – 94.2) Решить уравнение $3^x \cdot 2^{1-x} = 5 \cdot 2^x \cdot 3^{1-x}$.

19. (α – 94.2) Решить уравнение $2^{x \log_2 7} \cdot 7^{x^2+x} = 1$.

20*. (λ – 85.1) Что больше: $2^{\log_3 5} - 0{,}1$ или $5^{\log_3 2}$?

2 Тригонометрия

2.1 Вычисление тригонометрических выражений

21. (ψ – 86.1) Найти $\operatorname{tg}^2 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\sqrt{7}/6$.

22. ($\varkappa - 94.2$) Найти $\cos 2(\alpha - \pi/4)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -1/\sqrt{7}$.

23. ($\pi - 96.1$) Найти $\cos(\alpha + \pi/3)$, если $\sin\alpha = -3/5$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

24. ($\chi - 95.2$) Найти $\sin 2\alpha$, если $|\sin\alpha| = 3/\sqrt{10}$ и $\pi/2 < \alpha < \pi$.

25*. ($\zeta - 87.3$) Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\sqrt{5}/3$ и $\pi < \alpha < 4\pi/3$.

2.2 Простейшие тригонометрические уравнения

26. ($\gamma - 95.1$) Решить уравнение $2\cos(\pi(x-1)) = \sqrt{3}$.

27. ($\zeta - 77.1$) Решить уравнение $\sin^2 x = 3/4$.

28. ($\gamma - 84.1$) Решить уравнение $2\sin\frac{x}{4}\cos 3x = \cos 3x$.

29. ($\psi - 80.1$) Решить уравнение

$$\sqrt{3}^{\operatorname{tg} 2x} - \frac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg} 2x}} = 0.$$

2.3 Формулы двойного и половинного угла

30. ($\beta - 96.1$) Решить уравнение $\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = 0$.

31. ($\gamma - 85.1$) Решить уравнение $\sqrt{12}\sin x + \cos 2x = 1$.

32. ($\psi - 88.1$) Решить уравнение $1 + \cos\frac{x}{2} + \cos x = 0$.

33. ($\varphi - 86.2$) Решить уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = \sin x$.

34. ($\gamma - 90.1$) Решить уравнение

$$\cos^2 6x + 3\sin^2 3x - 1 = 0.$$

35*. ($\lambda - 94.6$) Решить неравенство $4\cos x - \sin 2x < 0$.

2.4 Разные формулы тригонометрии

36. ($\beta - 81.2$) Решить уравнение

$$\sin(3x + 7\pi/2) = \cos(3\pi/2 - 6x).$$

37. ($\lambda - 97.3$) Решить уравнение
$$\sin(x - 7\pi/6) - \cos(x - 7\pi/3) = \cos(2x - \pi/2).$$

38*. ($\zeta - 81.1$) Решить уравнение
$$\sin(x - \pi/3) + 2\cos(x + \pi/6) = 0.$$

39. ($\beta - 80.1$) Решить уравнение
$$1 + 2\cos 3x \cos x - \cos 2x = 0.$$

40. ($\zeta - 94.1$) Решить уравнение $\sin x \sin 3x = 1/2$.

41. ($\zeta - 98.1$) Решить уравнение $\sin 3x - \sin 2x \cos x = 0$.

42. ($\lambda - 94.4$) Решить уравнение
$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0.$$

43*. ($\gamma - 79.2$) Решить уравнение
$$\sin(x - \pi/3) - \sin(x + 5\pi/6) = \cos(x + \pi/4).$$

44*. ($\beta - 86.1$) Найти наименьший положительный корень уравнения
$$2\sin(x + \pi/3) = 2\cos(x + \pi/6) - \sqrt{3}.$$

2.5 Отбрасывание тригонометрических функций

45. ($\lambda - 94.4$) Решить уравнение $\sin 5x = \sin 5$.

46. ($\zeta - 93.2$) Решить уравнение $\cos 5x = \cos(5 + x)$.

47. ($\pi - 92.1$) Решить уравнение
$$2(\sin 6x - \sin 4x \sin 2x) = \cos 6x + \cos 2x.$$

48*. ($\beta - 91.2$) Решить уравнение $\sin 2x + \sin 3x + \cos 5x = 1$.

2.6 Введение вспомогательного угла

49. ($\chi - 82.1$) Решить уравнение $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{2}$.

50. ($\zeta - 94.2$) Решить уравнение $5\cos x + 2\sin x = 3$.

51*. ($\varepsilon - 88.2$) Решить уравнение
$$2\cos x + 2\cos^2 x = 1 - \sqrt{3}\sin 2x.$$

52*. ($\varphi - 91.4$) Решить уравнение $\frac{2}{\pi}\sin x + \cos 19\pi = \cos x$.

53. ($\lambda - 79.3$) Найти все a, при которых уравнение

$$4\sin x + 5\cos x = a$$

имеет хотя бы один корень.

3 Логарифмы

3.1 Вычисление логарифмов

54. ($\beta - 98.1$) Найти $\log_{\left(\sqrt[5]{b^6}a^4\right)} \dfrac{b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[5]{a}}$, если $\log_a b = \sqrt{5}$.

55. ($\zeta - 82.3$) Найти $\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, если $\log_b a = \sqrt{3}$.

56. ($\varphi - 88.1$) Вычислить $\dfrac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \dfrac{\log_5 750}{\log_6 5}$.

57. ($\pi - 93.1$) Найти $\log_2|\sin\alpha|$, если $\cos 2\alpha = 3/4$.

58*. ($\varepsilon - 92.1$) Найти $\log_{\frac{14}{25}}|\cos\alpha| + \log_{\frac{14}{25}}|\cos 3\alpha|$, если $\sin(\alpha + \pi/4) + \cos(\alpha + \pi/4) = -\sqrt{4/5}$.

3.2 Отбрасывание логарифмов

59. ($\pi - 86.2$) Решить неравенство $\log_5(1-x) < \log_5(x+7)$.

60. ($\varepsilon - 80.1$) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{5}}(26 - 3^x) + 2 < 0$.

61. ($\varepsilon - 80.1$) Решить уравнение $\log_2 \dfrac{1}{|x-1|-1} = 1$.

62. ($\zeta - 95.5$) Решить неравенство $|\log_3(x+2)| > 2$.

63. ($\psi - 96.2$) Решить двойное неравенство

$$-3 < \log_{\frac{1}{2}}(x+5)^2 \leqslant 2.$$

64. ($\beta - 96.3$) Решить неравенство $1 + \log_{\frac{1}{4}}\log_3(4-x) > 0$.

65. ($\zeta - 98.5$) Решить неравенство

$$\log_3\log_{\frac{1}{8}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - \frac{1}{2}\right) \leqslant -1.$$

66. $(\zeta - 81.4)$ Решить неравенство $5^{\log_3 \frac{2}{x+2}} < 1$.

67*. $(\mu - 86.3)$ Решить неравенство

$$3^{\frac{1}{4}\log_3^2 x} \leqslant \frac{1}{3}\, x^{\frac{1}{3}\log_3 x}$$

3.3 Особенности применения формул

68. $(\zeta - 95.5)$ Решить неравенство $4^{\log_2 x} + x^2 < 8$.

69. $(\zeta - 83.3)$ Решить неравенство

$$\frac{3}{2}\log_4 \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}\log_2 x > 1.$$

70. $(\zeta - 96.5)$ Решить уравнение $\log_2 x^2 - 2\log_8(-x^5) = 3$.

71. $(\psi - 87.2)$ Решить уравнение

$$\log_2(x^2 - 2x - 1) - \log_2(x - 1/2) = 1.$$

72. $(\psi - 80.4)$ Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 1/2) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geqslant 1.$$

73. $(\psi - 91.1)$ Решить неравенство $\lg(x+4) > -2\lg\dfrac{1}{2-x}$.

3.4 Случаи основания, зависящего от x

74. $(\gamma - 80.2)$ Решить уравнение $\log_{x-1} 3 = 2$.

75. $(\mu - 82.1)$ Решить уравнение $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$.

76. $(\pi - 95.3)$ Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_x 2} - \log_2 \frac{1}{x} \leqslant 2.$$

77. $(\pi - 93.3)$ Решить неравенство $\log_{9x^2+1} 37 > 1$.

78. $(\zeta - 81.4)$ Решить неравенство $\log_{\frac{1}{x-1}} 0{,}4 > 0$.

4 Системы и текстовые задачи

4.1 Системы

79. (μ – 79.3) Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y} + \dfrac{3}{x-2y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{2x-y} - \dfrac{1}{x-2y} = \dfrac{1}{18}. \end{cases}$$

80. (λ – 79.3) Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{2}y + \sqrt{12}\operatorname{ctg} x = 4 \\ \sqrt{8}y - \sqrt{27}\operatorname{ctg} x = 1. \end{cases}$$

81. (ζ – 79.3) Решить систему

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 1/9 \\ y - 2x = 4. \end{cases}$$

82. (ψ – 89.3) Решить систему

$$\begin{cases} 2\log_x 8 + 3y = 24 \\ -2\log_x^3 0,5 + y = 8. \end{cases}$$

83*. (ζ – 94.5) Решить систему

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$$

84. (ζ – 77.2) Найти все a, при которых любое решение системы

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $x > y$.

85*. (ζ – 81.2) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 4x - 2y = a \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

4.2 Прогрессии

86. (ζ – 79.2) Седьмой член арифметической прогрессии равен 21, а сумма первых семи членов равна 105. Найти первый член и разность прогрессии.

87*. ($\varkappa$ – 90.2) Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Сумма членов с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найти a_{12}, если $a_{20} = 3a_9$.

88. (ψ – 87.1) Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на 3/2 больше, чем сумма первых трех членов. Пятый член прогрессии равен учетверенному третьему члену. Найти четвертый член, если знаменатель прогрессии положителен.

89. (χ– 89.2) Числа $b_1, b_2, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию. Найти $b_2 b_8$, если $b_1 b_3 b_{11} = 8$.

90. ($\varkappa$ – 95.1) В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четвертого по четырнадцатый равна 77. Найти номер того члена, который равен 7.

91*. (π – 95.1) Четвертый член арифметической прогрессии составляет 50% от второго, который на 36 больше, чем третий член некоторой геометрической прогрессии. Найти первый член арифметической прогрессии, если он вдвое больше первого члена геометрической прогрессии и впятеро больше второго члена геометрической прогрессии.

92. (ε – 87.2) В магазине продано 12 т орехов трех сортов по цене 6, 4 и 2 руб. за килограмм на общую сумму 42 тыс. руб. Количества тонн проданных орехов первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано?

93*. (λ – 80.4) Из пункта A выехал автомобиль. Двигаясь в гору, он проехал в первую секунду 30 м, а в каждую следу-

ющую — на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от A, навстречу автомобилю выехал автобус, который в первую секунду проехал 2 м, а в каждую следующую — на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

4.3 Пропорции, доли, проценты и концентрации

94. (π – 93.1) Представить число 128 в виде суммы четырех слагаемых так, чтобы первое слагаемое относилось ко второму, как 2 : 3, второе к третьему — как 3 : 5, а третье к четвертому — как 5 : 6.

95. (σ – 98.3) Зимой 9% коренного населения города занято народным промыслом. Летом 36% коренного населения уезжает из города, но доля занятых народным промыслом среди оставшейся части остается неизменной, а общая численность населения составляет 80% от прежней за счет приезжающих туристов. Сколько процентов населения летом занято народным промыслом?

96. (β – 95.4) Саша и Коля дважды обменивались марками, причем каждый раз седьмая часть Сашиных марок обменивалась на половину Колиных. Сколько марок было вначале у Саши и сколько — у Коли, если у Саши после первого обмена стало 945 марок, а у Коли после второго — 220?

97. (λ – 98.4) Из цистерны в бассейн сначала перелили 50% имевшейся в ней воды, затем еще 100 л и, наконец, еще 5% остатка. В итоге количество воды в бассейне возросло на 31%. Сколько воды было в цистерне вначале, если в бассейне вначале было 2000 л воды?

98*. (ε – 95.4) В банк помещен вклад в размере 3900 руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет

после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же сумму. К концу пятого года после начисления процентов размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик добавлял ежегодно?

99*. ($\varkappa - 94.5$) Во время первой инъекции пациенту было введено 6 мл лекарства, а во время каждой следующей — еще по 4 мл. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшалось в 5 раз. Сколько лекарства содержалось в организме пациента непосредственно после 30-й инъекции?

100. ($\lambda - 94.7$) Технология изготовления дискет состоит из четырех этапов, на каждом из которых содержание кремния увеличивается на определенное количество процентов по отношению к результату предыдущего этапа: на первом этапе — на 25%, на втором — на 20%, на третьем — на 10%, а на четвертом — на 8%. На сколько процентов увеличится в результате содержание кремния?

101. ($\zeta - 78.2$) Руда содержит 40% примесей, а выплавляемый из нее металл — 4%. Сколько металла будет выплавлено из 24 т руды?

102. ($\gamma - 81.3$) Имелось два раствора кислоты в воде: 40%-й и 60%-й. Смешав эти растворы и добавив 5 кг воды, получили 20%-й раствор. Если бы вместо воды добавили 5 кг 80%-го раствора, то получился бы 70%-й раствор. Сколько было вначале 40%-го и 60%-го растворов?

103*. ($\lambda - 89.5$) Из сосуда, содержавшего 9 кг водного раствора соли, отлили часть раствора и добавили столько же (по массе) воды, а затем опять отлили столько же раствора. В итоге содержание соли в сосуде уменьшилось в 9/4 раза. Найти первоначальную массу соли в сосуде, если она была вдвое больше массы добавленной воды.

4.4 Движение и работа

104. ($\beta - 87.2$) Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему из пункта B отправляется катер. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет по течению. Какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если собственная скорость катера вчетверо больше скорости течения реки?

105. ($\pi - 95.4$) Из пункта A в пункт B двигалась колонна машин. В середине пути у одной из машин произошла поломка, на устранение которой ушла $1/12$ часть времени, за которое колонна проходит весь путь. Во сколько раз нужно увеличить скорость отставшей машине, чтобы приехать в пункт B одновременно с колонной?

106. ($\sigma - 89.3$) Ахиллес догонял черепаху, и когда расстояние между ними сократилось в 19 раз и составило 6 м, черепаха остановилась. Какой путь с начала погони проделала черепаха, если ее скорость в 37 раз меньше скорости Ахиллеса?

107*. (ψ–82.5) Из пункта A в пункт B вышел пешеход и одновременно из B в A — мотоциклист. Встретив пешехода, мотоциклист развернулся, довез пешехода до пункта B, а затем добрался до пункта A. Во сколько раз в результате непредусмотренных разъездов мотоциклист проиграл во времени, если пешеход, наоборот, выиграл во времени в 4 раза?

108. ($\gamma - 95.2$) Теплоход затратил на путь вниз по течению реки от пункта A до пункта B 5 ч, а на обратный путь — 8 ч 20 мин. Найти собственную скорость теплохода, если путь от A до B равен 100 км.

109. ($\lambda - 79.4$) Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 ч быстрее товарного и на 1 ч быстрее пассажирского. Скорость товарного поезда составляет 5/8

скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого. Найти скорости товарного и скорого поездов.

110*. ($\mu - 97.3$) Из пункта A в пункт B со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль. Через некоторое время из A в B выехал второй автомобиль, который обогнал первого, доехал до пункта B и после 20-минутной остановки отправился назад. На расстоянии 48 км от B он встретил первого, а в момент прибытия первого в B был на расстоянии 120 км от него. На каком расстоянии от A второй автомобиль обогнал первого, если $AB = 480$ км?

111*. ($\lambda - 97.6$) Пять труб одинаковой производительности начали заполнять один бассейн. Когда он был заполнен на треть своего объема, две трубы переключили для заполнения другого бассейна. Когда первый бассейн был заполнен наполовину, еще одну трубу переключили на второй бассейн, и оба бассейна наполнились одновременно. Найти отношение их объемов.

112. ($\pi - 91.2$) Три сенокосилки косят траву на поле. Первая и вторая, работая вместе, скашивают поле за 10 ч, вторая и третья — за 8 ч, а все три вместе — за 5 ч. За сколько часов скашивает это поле каждая сенокосилка в отдельности?

113. ($\varphi - 81.4$) Двое рабочих должны были изготовить по 36 деталей каждый. Первый из них приступил к работе на 4 мин позже второго, но треть задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив свое задание, первый рабочий после двухминутного перерыва снова приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым рабочим изготовил еще 2 детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

114*. ($\pi - 92.2$) На перевозку разных строительных материалов грузовик по-разному расходует горючее. В первый день половину рабочего времени он возил щебень, а полови-

ну — песок; во второй день 1/7 времени он возил щебень, 4/7 — песок и 2/7 — кирпич; в третий день 1/4 времени он возил щебень, 3/8 — песок и столько же — кирпич. На сколько процентов израсходует грузовик дневной норматив горючего, возя целый день щебень, если в первый день он израсходовал его на 95%, во второй — на $101\frac{3}{7}\%$, а в третий — $101\frac{1}{4}\%$?

5 Геометрия

5.1 Простейшие задачи

115. ($\varkappa$ – 80.3) Найти площадь прямоугольного треугольника ABC, в котором $AB = 13$, а высота, опущенная на гипотенузу AC, равна 12.

116. (ψ – 80.3) Вписанная в прямоугольный треугольник ABC окружность радиуса $\sqrt{3}$ касается катета AC в точке K. Найти BK, если $\angle A = 30°$.

117. (φ – 90.3) В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медиана CM и высота CH, причем точка H лежит между A и M. Найти $AH : AM$, если $CM : CH = 5 : 4$.

118. (λ – 89.4) В треугольнике ABC CD — биссектриса прямого угла. Из точки D опущен перпендикуляр DM на сторону AC. Найти BC, если $AD = 2\sqrt{3}$ и $DM = \sqrt{3}$.

119*. (φ – 79.1) Две общие касательные к двум непересекающимся окружностям пересекаются в точке A отрезка, соединяющего центры окружностей. Радиус меньшей окружности равен r, а расстояние от точки A до центра большей окружности равно $6r$. Точка A делит отрезок касательной между точками касания в отношении 1 : 3. Найти площадь фигуры, ограниченной касательными и бо́льшими дугами окружностей.

120. ($\chi - 77.4$) Найти площадь выпуклого четырехугольника с диагоналями 3 и 4, если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны.

121. ($\mu - 89.3$) В трапеции $ABCD$ проведена средняя линия EF, причем точка E лежит на AB. Прямая, проходящая через вершину A, пересекает сторону CD в точке H, а среднюю линию — в точке G, причем $EF = 3GF$, $AD = 4$ и $BC = 2$. Найти отношение высоты треугольника AHD, опущенной из вершины H, к высоте трапеции.

122. ($\pi - 93.4$) Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках E и F, причем $EF = 8$. Найти основания трапеции, если их отношение равно 4.

123. ($\varepsilon - 87.5$) В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки M и N соответственно так, что $AM : MB = 3 : 2$ и $AN : NC = 4 : 5$. Найти отношение, в котором прямая, проходящая через точку M параллельно BC, делит отрезок BN.

5.2 Применение тригонометрии

124. ($\chi - 94.4$) В четырехугольнике $ABCD$ углы B и D — прямые, $BC = CD = 3$ и $AC = 5$. На сторонах AB и AD взяты точки E и F соответственно так, что $BE = 1$ и $DF = 2$. Найти площадь пятиугольника $BCDFE$.

125. ($\sigma - 86.2$) Найти площадь ромба $ABCD$, если $BD = 3$ и $\operatorname{tg} \angle ABC = \sqrt{8}$.

126. ($\lambda - 77.4$) Найти острые углы прямоугольного треугольника, в котором биссектриса прямого угла делится центром вписанной окружности в отношении $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, считая от вершины.

127. ($\pi - 82.4$) Окружность радиуса 4 вписана в равнобедренную трапецию, одно из оснований которой равно 4. Найти расстояние между точками касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции.

128*. ($\psi - 82.4$) В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает биссектрисы углов B и D в точках K и L соответственно, а биссектриса угла C пересекает те же биссектрисы в точках N и M соответственно. Найти отношение площади четырехугольника $KLMN$ к площади параллелограмма $ABCD$, если $AB = 2$ и $AD = 5$.

129*. ($\gamma - 94.5$) Найти высоту, биссектрису и медиану, проведенные из вершины одного угла треугольника, если они делят этот угол на четыре равные части, а радиус описанной около треугольника окружности равен R.

130. ($\zeta - 97.4$) В окружность диаметром 25 вписан равнобедренный треугольник с боковой стороной 20. Найти радиус вписанной в треугольник окружности.

131. ($\lambda - 88.4$) Окружность радиуса 5 с центром O, лежащим на стороне AB треугольника ABC, касается сторон AC и BC. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AO = 13$ и $BO = 7$.

132. ($\varphi - 92.3$) На стороне AB ромба $ABCD$ взята точка N так, что $AN : BN = 2 : 1$. Найти $\operatorname{tg} \angle DNC$, если $\angle A = \pi/3$.

133*. ($\zeta - 90.4$) На стороне AB треугольника ABC с высотой AH взята точка K так, что $AK : BK = 1 : 2$. Через точку K проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке H. Найти радиус этой окружности, если $\angle BAC = \alpha$, $\angle B = \beta$ и $BC = a$.

134*. ($\pi - 97.5$) В треугольнике ABC биссектриса угла C равна $5\sqrt{3}$. Найти $\operatorname{tg} \angle A$ и BC, если $\angle C = 60°$ и $AC : BC = 5 : 2$.

135*. (ζ – 88.4) Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M так, что $BM : MC = 2 : 1$. Найти $\angle BAD$, если $\angle CAM = \alpha$.

5.3 Касательные, секущие и хорды

136. (π – 87.4) Две окружности радиусов 2 и 8 касаются друг друга внешним образом в точке A. Общая касательная к ним, проведенная через точку A, пересекает другую общую касательную в точке B. Найти AB.

137. (γ – 93.4) Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Найти площадь треугольника AMN, если $AB = 4$, $BC = 2$ и $AC = 3$.

138*. (χ – 88.4) Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AB в точке D. Найти AC, если $BC = 11$, $\cos \angle A = 1/6$ и $AC = CD$.

139. (ζ – 94.4) Найти острые углы прямоугольного треугольника, в котором отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно $2 : 5$.

140. (α – 91.2) В четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = CD = 9$ вписана окружность радиусом 4. Найти площадь четырехугольника.

141. (μ – 77.2) В трапецию с боковыми сторонами 3 и 5 можно вписать окружность. Найти основания трапеции, если средняя линия делит ее на части, площади которых относятся, как $5 : 11$.

142*. (φ – 88.4) Окружность, касающаяся сторон AD и CD параллелограмма $ABCD$, проходит через точку B и пересекает стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Найти AD, если $AE : BE = 4 : 5$, $BF : CF = 8 : 1$ и $AB = 8$.

143. ($\chi - 97.5$) Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Общая касательная к ним касается первой окружности в точке B, а второй — в точке C. Прямая AB пересекает вторую окружность в точке D. Найти CD, если $AB = 5$ и $AD = 4$.

144*. ($\zeta - 96.6$) Хорда AB окружности радиуса R, перпендикулярная ее диаметру CD, пересекает хорду CE в точке F. Найти CF, если $CE = a$ и $AF : BF = 1 : 3$.

5.4 Дуги окружности и углы

145. ($\mu - 82.2$) Диагонали вписанной в окружность трапеции взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции, если ее периметр равен 18, а основания относятся, как $1 : 7$.

146. ($\psi - 78.2$) Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ служит диаметром описанной около него окружности. Найти AC, если $BD = 2$, $AB = 1$ и $\angle ABD : \angle CBD = 4 : 3$.

147. ($\zeta - 98.6$) Сторона AB четырехугольника $ABCD$ служит диаметром описанной около него окружности радиуса R, а диагонали пересекаются в точке E. На стороне AB взята точка F так, что окружность с диаметром BF касается прямой AC в точке E. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если $\angle BAC = \alpha$.

148. ($\lambda - 95.7$) Продолжение биссектрисы CD треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке E, причем CE — диаметр окружности. Найти отношение $AC : BE$, если $\sin \angle A = 1/4$.

149. ($\pi - 85.4$) Через вершину B равнобедренного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая его основание AC в точке D и описанную около него окружность в точке E. Найти AB, если $BD = DE = 3$.

150. ($\varphi - 78.5$) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность единичного радиуса. Найти площадь пятиугольника, если $AB = \sqrt{2}$, $BC = CD$, $\angle ABE = \pi/4$ и $\angle DBE = \pi/6$.

151. ($\sigma - 98.4$) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Найти AB, если $BC = 7$, $CD = 4$, $\cos\angle C = 1/2$ и $\sin\angle ABD = 1/3$.

152. ($\mu - 94.4$) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Прямая, касающаяся в точке E описанной около треугольника BCE окружности, пересекает в точке F продолжение основания AD трапеции за точку D. Найти EF, если $AF = a$ и $AD = b$.

153*. ($\mu - 97.4$) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке E, а касательная, проходящая через точку B, параллельна AC. Найти площадь треугольника BCE, если $AE : AD = 3 : 4$, а площадь треугольника BCD равна 16.

154*. ($\beta - 97.5$) Через вершину C и середины сторон AB, BC треугольника ABC проведена окружность радиусом $\sqrt{2}$, касающаяся стороны AB. Найти $\sin\angle C$, если $AC = 2$.

155*. ($\zeta - 93.6$) Окружность касается сторон угла с вершиной C в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника ABC взята точка M, находящаяся на расстоянии a и b от прямых AC и BC соответственно. Найти расстояние от точки M до AB.

156*. ($\psi - 92.3$) Диагонали BD и CE пятиугольника $ABCDE$, вписанного в окружность радиусом $2\sqrt{2}$, пересекаются в точке M. Найти площадь треугольника ABC, если $BC \parallel AD$, $AC \parallel DE$, $CD \parallel BE$ и $\angle BMC = 45°$.

157. ($\beta - 95.5$) Окружность с центром O, проходящая через вершины B, C и D четырехугольника $ABCD$, пересекает стороны AB и AD в точках E и F соответственно. Найти $\angle ABO$, если $EF = BE$, $BC = CD = DF$ и $\angle A = 90°$.

158. ($\mu - 91.4$) Окружность с центром в точке H, служащей основанием высоты BH треугольника ABC, проходит через вершину B и пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найти BC, если $MB = m$, $NB = n$ и $AB = a$.

159. ($\zeta - 95.8$) Диаметр AB окружности параллелен хорде CD. Прямая, касающаяся окружности в точке A, пересекает прямые BC и BD в точках M и N соответственно. Найти AB, если $AM = m$ и $AN = n$.

5.5 Медианы, высоты и биссектрисы

160. ($\varkappa - 95.3$) Медианы AM и CN треугольника ABC взаимно перпендикулярны. Найти площадь треугольника ABM, если $BC = a$ и $AC = b$.

161. ($\zeta - 98.4$) Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K. Найти расстояние от точки K до прямой AC, если $BC = a$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$.

162. ($\varphi - 80.4$) В треугольнике ABC проведены высота BH и медиана BM. Найти $\cos \angle MBH$, если $AB = 1, BC = 2$ и $AM = BM$.

163. ($\varepsilon - 79.2$) В треугольнике ABC проведены высоты BD и AE. Найти AC, если $BD = 11{,}2$, $AE = 12$ и $BE : EC = 5 : 9$.

164. ($\zeta - 96.8$) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны AB и BC. Найти $\angle ABC$, если $BH = h$ и $MN = a$.

165*. ($\psi - 93.4$) В остроугольном треугольнике ABC AH и CK — высоты. Найти площадь круга, описанного около треугольника KBH, если $AC = 1$ и $\angle KCH = \alpha$.

166. (μ – 78.3) В остроугольном треугольнике ABC AH и CK — высоты. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $HK = 2\sqrt{2}$, а площади треугольников ABC и BHK равны 18 и 2 соответственно.

167. (ζ – 96.7) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найти AD, если $BD = b$ и $CD = c$.

168*. (γ – 92.4) В треугольнике ABC биссектриса BL и медиана AM перпендикулярны и равны по 4 каждая. Найти стороны треугольника ABC.

169. (ψ – 95.4) В треугольнике ABC периметром 28 биссектрисы AD и BE пересекаются в точке M. Найти AB, если $AB = BE$ и $BM = 2\,ME$.

170. (α – 95.4) Продолжение биссектрисы CD треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке E. Найти AC, если $AB = 3$, $BC = 2\,AC$ и $DE = 1$.

5.6 Стереометрия

171. (β – 96.4) Через вершину S прямого конуса проходит плоское сечение SAB площадью 42. Точки A и B делят длину окружности основания конуса в отношении $1:5$. Найти объем конуса, если $\angle SAB = \arccos\frac{3}{\sqrt{58}}$.

172. (χ – 81.4) Два шара радиуса r касаются друг друга и боковой поверхности прямого конуса, а также его основания — в точках, симметричных относительно центра. Найти объем конуса, если его высота в $4/3$ раза больше радиуса основания.

173. (ζ – 96.6) Найти объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна d и образует с боковыми гранями углы α и β.

174. ($\varphi - 81.5$) Найти сторону основания правильной треугольной призмы объемом V, если угол между диагоналями двух ее боковых граней, проведенными из одной вершины, равен α.

175. ($\lambda - 77.5$) Найти радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a, и углом φ между боковыми ребрами.

176. ($\zeta - 97.8$) В правильную треугольную пирамиду с двугранным углом α при боковом ребре вписана сфера радиусом r. Найти объем пирамиды, вершинами которой служат центр сферы и точки ее касания с боковыми гранями.

177. ($\gamma - 98.5$) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ проведены биссектриса AL боковой грани SAB и медиана BM основания ABC. Найти LM, если $AB = 1$ и $AS = 2$.

178. ($\varkappa - 98.4$) На высоте правильной треугольной пирамиды взята точка, удаленная от бокового ребра пирамиды на расстояние $4/\sqrt{13}$ и делящая высоту в отношении $1:2$, считая от вершины. Найти объем пирамиды, если ее боковые грани наклонены к основанию под углом $\pi/6$.

179. ($\zeta - 97.6$) Найти высоту пирамиды, основанием которой служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9, если ее боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $60°$.

180. ($\beta - 98.4$) Основанием пирамиды $SABC$ с высотой SH служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, а боковые грани наклонены к основанию под углом $\arcsin \frac{5}{13}$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если $AH = 1$ и $BH = 3\sqrt{2}$.

181. ($\zeta - 89.4$) Отношение бокового ребра к высоте правильной четырехугольной пирамиды равно 2. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к апофеме пирамиды.

182. $(\zeta - 94.8)$ В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с высотой SH и ребром основания $AB = a$ угол между боковым ребром и плоскостью основания равен φ. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SA и BC.

183. $(\zeta - 95.6)$ Найти объем правильной четырехугольной пирамиды с высотой H и двугранным углом α при боковом ребре.

184*. $(\pi - 82.5)$ В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с высотой 4 сторона основания $ABCD$ равна 6. Точки M и N — середины ребер BC и CD. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду $SMNC$.

5.7 Координаты и векторы

185. $(\lambda - 90.2)$ Прямая $y = -2x + 2$ пересекается с прямой $y = x$ и с осью абсцисс в точках A и B соответственно. Найти площадь треугольника ABO, где O — начало координат.

186. $(\alpha - 96.2)$ Найти площадь фигуры, заданной системой

$$\begin{cases} y \geqslant -|x| - 1 \\ y \leqslant -2|x| + 3. \end{cases}$$

187. $(\zeta - 80.2)$ Найти координаты точки A в пространстве, лежащей на оси абсцисс и одинаково удаленной от точек $B = (1;2;3)$ и $C = (2;3;4)$.

188. $(\zeta - 78.3)$ Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A = (1;2;3)$ перпендикулярно прямой AB, где $B = (4;6;9)$.

189. $(\zeta - 79.2)$ Найти угол между векторами $\vec{a} = (6;-2;-3)$ и $\vec{b} = (5;0;0)$.

Квадратные уравнения и неравенства

6 Квадратный трехчлен

6.1 Дискриминант и формула корней

190. ($\chi - 95.1$) Решить неравенство $\dfrac{2x}{x^2+3} \leqslant 1$.

191. ($\gamma - 86.1$) Решить неравенство $\dfrac{x-1}{x^2+6x-4} > \dfrac{1}{6}$.

192. ($\lambda - 97.1$) Сколько корней имеет уравнение
$$\sqrt{6}(x^2+2) + 2x\sqrt{5} = \sqrt[4]{35}(x^2-2) + 2x\sqrt{7}\,?$$

193. ($\gamma - 80.1$) Найти все a, при которых уравнение
$$x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$$
имеет ровно два различных корня.

6.2 Разложение на линейные множители

194. ($\varepsilon - 84.1$) Решить неравенство $\log_8 \dfrac{2x+15}{2x^2+3} \geqslant 0$.

195. ($\varepsilon - 89.1$) Найти область определения функции
$$y(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{x^2+6x+8}}.$$

196. ($\gamma - 97.1$) Найти область определения функции
$$y(x) = \sqrt{x^2-2x-3} + \log_{3+x}(9-x^2).$$

197. ($\zeta - 86.1$) Решить уравнение $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{(4-x^2)/2} = 8^x$.

198. ($\varepsilon - 80.2$) Решить неравенство
$$5^{4x^2-3x+1/2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-40x^2}$$

7 Квадратные уравнения и неравенства относительно различных выражений

7.1 Биквадратные уравнения и неравенства

199. ($\pi - 82.3$) Решить уравнение $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$.

200. ($\pi - 96.2$) Решить неравенство $3x^4 - 4 < 11x^2$.

201*. ($\zeta - 93.7$) Про числа $a < 0$ и b известно, что уравнение
$$ax^2 + bx + 2 = 0$$
имеет одним из своих корней число $x = 7$. Решить неравенство
$$ax^4 + bx^2 + 2 > 0.$$

7.2 Уравнения и неравенства, квадратные относительно a^x

202. ($\pi - 91.1$) Решить уравнение $25^x + 24 \cdot 5^{x-1} - 1 = 0$.

203. ($\psi - 85.2$) Решить неравенство $3 \cdot 9^x < 8 \cdot 3^x + 3$.

204. ($\zeta - 96.5$) Решить неравенство $4^{x-0,5} + 2^{x+1} - 16 < 0$.

205. ($\gamma - 87.1$) Решить уравнение $7^x - 14 \cdot 7^{-x} = 3^{\log_3 2} + 3$.

206. ($\beta - 86.2$) Решить неравенство $2^x - 1 < 6 \cdot 2^{-x}$.

207. ($\zeta - 96.3$) Решить уравнение
$$5^{x/2} - 5^{2-3x/2} = 24 \cdot 5^{-x/2}.$$

208. ($\zeta - 81.3$) Решить уравнение $\dfrac{3^{2x}}{100^x} = 2\,(0{,}3)^x + 3$.

209. ($\gamma - 96.2$) Решить неравенство
$$9\left(\frac{1}{81}\right)^x - 17\left(\frac{1}{27}\right)^x - 2\left(\frac{1}{9}\right)^x \geqslant 0.$$

210. ($\varphi - 91.2$) Решить уравнение $\log_2(5 \cdot 2^x + 3) = 2x + 1$.

211*. ($\zeta - 85.4$) При каждом a решить уравнение
$$4^x - 2a(a+1)\,2^{x-1} + a^3 = 0.$$

7.3 Уравнения и неравенства, квадратные относительно $\log_a x$

212. (χ – 93.2) Решить уравнение
$$\log^2_{1/3} x - 4\log_3 x + 3 = 0.$$

213. (β – 95.1) Решить уравнение $4\log_4^2 x = \log_2 \frac{x^5}{16}$.

214. (ζ – 84.2) Решить неравенство $4\log_{25} 5x > 5 - \log_5^2 x$.

215. (π – 81.2) Решить уравнение
$$2\lg^2 x + (1 - \sqrt{2})\lg x^2 = 2\sqrt{2}.$$

7.4 Уравнения, квадратные относительно $\sin x$ или $\cos x$

216. (λ – 87.2) Решить уравнение $2\cos^2 x + 7\sin x = 8$.

217. (φ – 80.1) Решить уравнение $\sin x = \cos 2x$.

218. (β – 87.1) Решить уравнение
$$7\sin(2x - 5\pi/2) + 9\cos x + 1 = 0.$$

219. (φ – 84.2) Решить уравнение $\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos x = 0{,}5$.

220. (π – 80.2) Решить уравнение
$$2 - \cos 2x + 2\sqrt{2}\cos(x + \pi/2) = 0.$$

221*. (χ – 83.1) Решить уравнение
$$\cos(2x + \pi/4) + \cos(2x - \pi/4) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x).$$

222. (π – 95.5) Найти все a, при которых уравнение
$$2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$$
не имеет корней.

8 Дополнительные соображения

8.1 Учет области допустимых значений

223. (λ – 94.5) Решить неравенство $\sqrt{4x - 3 - x^2} \neq 0$.

224. ($\pi - 79.2$) Решить неравенство $2^{\sqrt{x^2-x-3}} > \left(\sqrt{2}^{\sqrt{x}}\right)^2$.

225. ($\lambda - 83.3$) Решить неравенство

$$\log_{\sin\frac{\pi}{3}}(x^2 - 3x + 2) \geqslant 2.$$

226. ($\varepsilon - 78.3$) Решить уравнение

$$3 + \frac{1}{\log_{32}\frac{x}{2}} = \log_{x/2}\left(\frac{75x}{4} - \frac{11}{x}\right).$$

227. ($\varphi - 79.3$) Решить неравенство

$$1 + \log_{1/2}(4 - x) \geqslant -\log_{1/2}(x - 1).$$

228. ($\beta - 89.1$) Решить уравнение

$$\log_{49}(2x^2 + x - 5) + \log_{1/7}(1 + x) = 0.$$

229. ($\gamma - 91.2$) Решить неравенство

$$\frac{1}{4}\log_2(x - 2) - \frac{1}{2} \leqslant \log_{\frac{1}{4}}\sqrt{x - 5}.$$

230. ($\pi - 77.2$) Решить уравнение

$$2\lg(x + 1/2) - \lg(x - 1) = \lg(x + 5/2) + \lg 2.$$

231. ($\varepsilon - 82.3$) Решить неравенство

$$\log_3((x + 2)(x + 4)) + \log_{1/3}(x + 2) < \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 7.$$

232. ($\lambda - 97.2$) Решить уравнение

$$2 - \log_3 x = \log_3\left(\frac{5}{3}|x| + 2\right).$$

233. ($\zeta - 95.5$) Решить неравенство $5^{\log_{1/3}(x^2+2x)} \geqslant 0{,}2$.

234. ($\gamma - 97.3$) Решить уравнение

$$\log_{|\sin\frac{\pi x}{4}|}(9^x - 3^{x+3} + 30) = \log_{|\sin\frac{\pi x}{4}|}(3^x + 3).$$

235*. ($\pi - 98.3$) Решить уравнение

$$\log_{0,5}\log_4\frac{1}{x} + \log_4\log_2(16x^2) = 0.$$

236*. ($\zeta - 90.5$) При каждом a решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2-x}}\sqrt{2x + a} = 2.$$

8.2 Комбинации различных функций

237. ($\zeta - 94.3$) Решить неравенство $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} < 20$.

238. (ζ – 98.3) Решить уравнение
$$27^{2/x} + 27 \cdot 3^{3/x-1} - 36 = 0.$$

239. (γ – 79.1) Решить уравнение
$$4^{\log_9 x} - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 27} = 0.$$

240. (β – 78.4) Решить неравенство
$$\log_2^2(x - x^2 + 2) + 3\log_{1/2}(x - x^2 + 2) + 2 \leqslant 0.$$

241. (γ – 81.1) Решить уравнение
$$\log_3(2x+1) = 2\log_{(2x+1)} 3 + 1.$$

242. (λ – 97.2) Решить уравнение
$$3\cos 8x = 14(\sin 2x - \cos 2x)^2 - 3.$$

243. ($\varkappa$ – 84.2) Решить уравнение
$$9\cos 3x \cos 5x + 7 = 9\cos 3x \cos x + 12\cos 4x.$$

244*. (φ – 89.1) Решить уравнение
$$2\cos(2x - \pi/3) + 1 = \cos(x + \pi/3).$$

245. (λ – 98.3) Решить уравнение $5 + \dfrac{1}{\sin^2 3x} = 7\operatorname{ctg} 3x$.

246. (ζ – 80.3) Решить уравнение $3\sqrt{\log_3 x} + \log_3 3x = 11$.

247*. (ψ – 82.3) Решить уравнение
$$\sqrt[4]{8}\cos x - 1 = (\sqrt{2} - \sqrt[4]{2})\sqrt{\cos x}.$$

8.3 Оптимальный выбор новой переменной

248. ($\varkappa$ – 94.1) Решить уравнение
$$(4|x-1| + 1/2)^2 = 11(x-1)^2 + 5/4.$$

249. (λ – 93.2) Решить уравнение
$$\sqrt{1 - \cos^2 x} + 6\cos 2x = 0.$$

250. (ε – 83.3) Решить неравенство
$$\log_3(x^2 - 2) < \log_3\left(\frac{3}{2}|x| - 1\right).$$

251. (ζ – 94.5) Решить уравнение $\log_{1/2}^2 4x + \log_2 \dfrac{x^2}{8} = 8$.

252. ($\chi - 82.3$) Решить неравенство $f(g(x)) < g(f(x))$, где $f(x) = 2x + 2,\ g(x) = 2^x + 10$.

253. ($\beta - 90.2$) Решить неравенство

$$9^{2x+0,5} - 10 \cdot 27^{2x/3} > 11/3.$$

254. ($\varkappa - 77.1$) Решить неравенство

$$2^{2x+1} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geqslant 0.$$

255. ($\varepsilon - 77.2$) Решить уравнение $8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7$.

256. ($\lambda - 78.1$) Решить уравнение $-5\cos 4x = 2\cos^2 x + 1$.

8.4 Роль грубых оценок

257. ($\varkappa - 94.1$) Решить уравнение $12\sin 5x = \cos 10x + 7$.

258. ($\gamma - 81.2$) Решить уравнение $2\cos x + 3\cos 2x = 3$.

259*. ($\psi - 90.1$) Решить уравнение

$$4\sin^2(2(x + \pi/2)) - 2(\sqrt{5} - \sqrt{3})\cos(2x - \pi) + \sqrt{15} - 4 = 0.$$

260. ($\varphi - 89.3$) Решить уравнение $\log_{2x+2}(2x^2 - 8x + 6) = 2$.

261. ($\varepsilon - 84.1$) Решить уравнение

$$\log_2(x + 2) = 7 - \log_2(5x + 6).$$

262. ($\pi - 94.3$) Решить неравенство $\lg(x + 5) \geqslant -2\lg\dfrac{1}{3 - x}$.

263*. ($\varphi - 77.3$) Найти наименьший положительный корень уравнения

$$\cos(\pi x^2) = \cos(\pi(x^2 + 2x + 1)).$$

8.5 Учет области значений выражения

264. ($\mu - 89.1$) Решить уравнение $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$.

265. ($\zeta - 93.3$) Решить уравнение $\sqrt{\log_2 x} = 2\log_2\sqrt{x} - 1$.

266. ($\beta - 78.4$) Решить неравенство

$$9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1}.$$

267*. (α – 98.2) Решить уравнение
$$2^{-2x^2+1} - 12 \cdot 2^{-x^2} + 5 = 0.$$

268*. (λ – 91.4) Решить уравнение $3^{2\log_5^2 x} + 1 = 4 \cdot 3^{\log_5^2 x}$.

269*. (ε – 98.4) Решить уравнение
$$3^{2(x+1)^2+1} - 87 \cdot 3^{x^2+2x} + 18 = 0.$$

270*. ($\varkappa$ – 85.3) Решить уравнение
$$4 - \cos(2\pi(13x+9)^2) = 5\sin(\pi(13x+9)^2).$$

271. (μ – 96.1) Решить уравнение $\dfrac{5}{\sin^2 x} - \dfrac{5\sqrt{5}}{\sin x} + 6 = 0$.

272*. ($\varkappa$ – 90.3) Решить уравнение
$$3 \cdot 64^{2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0.$$

273*. (ε – 98.5) Найти все a, при которых область значений функции
$$f(x) = \frac{x^2 + 2ax - 4}{x^2 - 2x + 3}$$
содержится в интервале $(-3; 2)$

8.6 Системы, сводящиеся к квадратным уравнениям

274. (ψ – 82.2) Решить систему
$$\begin{cases} x + 2y = y^2 - x^2 + 3 \\ 2^{3x+y} = 512. \end{cases}$$

275. (φ – 83.2) Решить систему
$$\begin{cases} y^2 = 4^x + 8 \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0. \end{cases}$$

276. ($\varkappa$ – 85.1) Решить систему
$$\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2 \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$$

277. (μ – 80.4) Решить систему
$$\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1 \\ 5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + y = 1. \end{cases}$$

278. ($\zeta - 98.5$) Решить систему

$$\begin{cases} 3^{\log_2(2x-y)} = 1 \\ 4^{x+y} - 2^{x+y} = 12. \end{cases}$$

279*. ($\pi - 98.4$) Решить систему

$$\begin{cases} y^x = 3y \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$$

280. ($\zeta - 81.2$) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

281*. ($\psi - 94.2$) Известно, что $x = 1$, $y = -1$ — одно из решений системы

$$\begin{cases} 3ax + by = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{1111\pi}{6} \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$$

Найти остальные решения системы.

8.7 Квадратные уравнения и неравенства в текстовых задачах

282. ($\psi - 97.3$) Сумма первого и последнего членов конечной возрастающей геометрической прогрессии равна 164, а произведение второго и предпоследнего ее членов равно 324. Найти последний член прогресси.

283. ($\psi - 84.5$) Первый член геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем равен 5, а разность между утроенным вторым членом и половиной третьего — больше 20. Найти знаменатель прогрессии.

284. ($\lambda - 80.4$) В первый рабочий день месяца в магазине было продано 105 телевизоров, а в каждый следующий — на 10 телевизоров больше, чем в предыдущий. После досрочного выполнения месячного плана, составлявшего 4000 телевизоров, ежедневно продавалось одинаковое количество

телевизоров, на 13 меньшее, чем в последний день выполнения плана. На сколько процентов был перевыполнен план, если в месяце было 26 рабочих дней?

285. (ζ – 83.4) После деления двузначного числа на сумму его цифр в частном получилось 7, а в остатке 6. После деления того же числа на произведение его цифр в частном получилось 3, а в остатке 11. Найти это число.

286. ($\varkappa$ – 96.2) Имелось два раствора кислоты в воде: 60%-й и 20%-й. Первую смесь получили из некоторого количества первого раствора и 15 л второго, а вторую смесь — из того же количества первого раствора и 5 л второго. Сколько литров первого раствора использовано для приготовления каждой смеси, если концентрация кислоты в первой смеси вдвое меньше концентрации воды во второй?

287. (ε – 77.1) Для разгрузки парохода выделено две бригады грузчиков. Если ко времени, за которое разгружает пароход одна бригада, прибавить время, за которое разгружает пароход другая, то получится 12 ч. Определить эти времена, если их разность составляет 45% времени, за которое бригады разгружают пароход вместе.

288. (λ – 77.2) Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в 2 мин. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта и, пройдя еще 4 км, повернул обратно, встретившись с первым бегуном через20 мин после старта первого бегуна. Найти скорость второго бегуна.

289. (β – 90.3) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 300 км, выехал легковой автомобиль, а из B в A одновременно с ним — грузовой. После встречи, которая произошла через 4 ч, легковой автомобиль увеличил скорость на 15 км/ч, а грузовой — на 30 км/ч. Найти первоначальную скорость легкового автомобиля, если он прибыл в пункт B на час раньше, чем грузовой — в A.

290*. (β – 78.2) В реку впадает приток. Пароход идет от пристани A на притоке вниз по его течению 80 км до реки, а затем вверх против течения реки до пристани B, затратив на весь путь 18 ч. Обратный его путь занимает 15 ч. Собственная скорость парохода равна 18 км/ч, а скорость течения реки — 3 км/ч. Найти длину пути от A до B и скорость притока.

291. (γ – 85.3) Две реки с прямолинейными руслами и одинаковой скоростью течения впадают в одном и том же месте в озеро, образуя между собой угол в 60°. От двух причалов A и B, расположенных на разных реках, одновременно вышли байдарка и лодка, собственные скорости которых равны, соответственно, 10 и 3 км/ч. Байдарка достигла озера через 2 ч, а лодка — через 4. Найти скорость течения рек, если $AB = 28$ км.

8.8 Использование квадратных уравнений в геометрии

292. (ε – 80.2) В прямоугольный треугольник периметром 36 вписана окружность. Найти стороны треугольника, если гипотенуза делится точкой касания в отношении 2 : 3.

293. (β – 80.4) Найти стороны параллелограмма $ABCD$ периметром 26, если $\angle B = 120°$, а радиус вписанной в треугольник ABD окружности равен $\sqrt{3}$.

294. (χ – 78.4) Биссектриса угла A трапеции $ABCD$ пересекает основание BC в точке E. Вписанная в треугольник ABE окружность касается сторон AB и BE в точках M и N соответственно. Найти $\angle BAD$, если $AB = 2$ и $MN = 1$.

295. (ε – 81.5) Диагональ AC вписанного в окружность четыреугольника $ABCD$ является биссектрисой угла A и

пересекается с диагональю BD в точке K. Найти KC, если $AK = 6$ и $BC = 4$.

296*. ($\varepsilon - 90.3$) Окружность касается катетов AB и BC прямоугольного треугольника ABC в точках K и L соответственно, а ее центр O лежит на гипотенузе AC. Найти AK, если $LC = 23/16$ и $AK : KM = 5 : 23$, где M — точка пересечения окружности с гипотенузой, лежащая между O и C.

297. ($\varphi - 89.4$) Хорда AB круга с центром O пересекает радиус OC в точке D. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AD, DC и дуги AC, если $OC = 2, OD = \sqrt{3}$ и $\angle ADC = 2\pi/3$.

298*. ($\mu - 95.4$) Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Расстояние от точки B до прямой AD равно 3, а площадь треугольника ADK равна 25/2. Найти AD и BC, а также радиус окружности, если $AB = CD = 5$ и $AD > BC$.

299*. ($\zeta - 77.4$) Найти углы трапеции, в которую можно вписать окружность и около которой можно описать окружность, причем радиус последней в $\sqrt{3/2}$ раза больше высоты трапеции.

300. ($\zeta - 81.5$) Площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через вершину ее основания перпендикулярно противоположному боковому ребру, вдвое меньше площади основания пирамиды. Найти отношение высоты пирамиды к боковому ребру.

Часть II

Генеральные методы решения задач

Метод перебора

9 Расщепление уравнений и неравенств

9.1 Расщепление уравнений

301. ($\varepsilon - 86.3$) Решить уравнение
$$\sqrt{3x+4}\,(9x^2+21x+10)=0.$$

302. ($\lambda - 83.1$) Решить уравнение
$$(x+1)\sqrt{x^2-3x-6}=2x+2.$$

303. ($\psi - 81.1$) Решить систему
$$\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2 \\ x^5\sqrt{x^2-4y^2}=0. \end{cases}$$

304. ($\pi - 92.3$) Решить уравнение
$$\frac{4^x-2^{x+2}+3}{2^{x/2}-1}+2^{x/2}+1=0.$$

305. ($\lambda - 88.3$) Решить уравнение
$$(2x^2-5x+2)\,(\log_{2x}18x+1)=0.$$

306. ($\varphi - 98.3$) Решить уравнение $\dfrac{\log_3(7-6x)}{\log_3(2-x)}=2.$

307. ($\mu - 81.2$) Решить систему
$$\begin{cases} \sqrt{\sin x}\,\cos y=0 \\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0. \end{cases}$$

308*. ($\chi - 97.3$) Решить уравнение
$$\operatorname{tg}(x+\pi/4)+\operatorname{tg}(x-\pi/4)=\operatorname{tg}x.$$

309. ($\lambda-79.1$) При каждом a решить уравнение $\dfrac{a}{2a-x}=3.$

9.2 Метод интервалов

310. ($\pi - 98.2$) Решить неравенство $(x^2 - 4x)^2 \geqslant 16$.

311. ($\sigma - 89.1$) Решить неравенство $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{5 - x} > 0$.

312. ($\mu - 77.1$) Решить неравенство $x \leqslant 3 - \dfrac{1}{x - 1}$.

313. ($\zeta - 96.2$) Решить неравенство $\dfrac{2x - 7}{x - 3} > \dfrac{9}{5 - x}$.

314. ($\psi - 82.1$) Решить неравенство
$$\frac{2x - 3}{x} \geqslant \frac{3 - 2x}{2x^2 - 4x}.$$

315. ($\lambda - 95.1$) Решить неравенство
$$\frac{7}{x^2 - 5x + 6} + \frac{9}{x - 3} + 1 \leqslant 0.$$

316*. ($\psi - 90.3$) Решить неравенство
$$\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{8} - \frac{15}{88 - 32x}\right)^2 \geqslant 1.$$

317. ($\zeta - 82.2$) Найти все a, при которых уравнение
$$5x - 17a = 21 - 5ax$$
имеет корень, бóльший 3.

9.3 Расщепление неравенств

318. ($\lambda - 94.6$) Решить неравенство $|x|\,(x^4 - 2x^2 - 3) \geqslant 0$.

319. ($\varepsilon - 86.3$) Решить неравенство
$$\sqrt{-25x^2 + 15x - 2}\,(8x^2 - 6x + 1) \geqslant 0.$$

320*. ($\alpha - 95.5$) Решить неравенство
$$\sqrt{4x - x^2 - 3}\,(\sqrt{2}\cos x - \sqrt{1 + \cos 2x}) \geqslant 0.$$

321. ($\lambda - 98.1$) Решить неравенство $\dfrac{x^2 + 5x - 6}{|x + 4|} < 0$.

322. ($\zeta - 96.2$) Решить неравенство $\dfrac{x - 2}{x\sqrt{10 + 3x - x^2}} > 0$.

323. (γ – 98.1) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{-4x^2+13x-3}+1}{\log_{3x}7} \geqslant 0.$$

324. (χ – 84.1) Решить неравенство $\dfrac{\log_3^2(1-x)}{x^2-3} \geqslant 0.$

325. (ψ – 95.2) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{1-\log_{\sqrt{3}}(x-3)} \leqslant 0.$

326. (π – 96.3) Решить неравенство $\dfrac{2}{2-\sqrt{x+3}} \leqslant 1.$

327. (μ – 97.1) Решить неравенство
$$\frac{21-2^x-2^{6-x}-|3-2^x|}{5-|3-2^x|} \geqslant 1.$$

9.4 Разные задачи на расщепление

328. (ζ – 98.3) Решить неравенство $4^{\frac{3x-2}{x}} < \sqrt[3]{8^{3x-7}}$.

329. ($\varkappa$ – 96.1) Решить неравенство
$$\sqrt{(2x+1)^4-(2x+1)^2}+(2x+1)^2 \geqslant 0.$$

330. (μ – 95.2) Решить неравенство
$$\frac{2}{\dfrac{2}{\log_2 x}-1} > -3.$$

331. (ψ – 86.3) Решить неравенство $\dfrac{\lg x^2-2}{4-3\lg x^4} > -\dfrac{1}{2}.$

332. ($\varkappa$ – 98.1) Решить неравенство
$$\frac{1}{\log_2\dfrac{4}{x}} \geqslant \log_2\frac{x}{8}-1.$$

333. (λ – 96.4) Решить неравенство
$$\frac{1}{\log_9(-27x)} < \frac{1}{\log_3(-x)}.$$

334. (γ – 92.3) Решить неравенство
$$(\log_x 2-1)\log_2 2x \leqslant 3/2.$$

335. ($\psi - 90.2$) Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x}-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{3}.$$

336. ($\lambda - 77.1$) Решить неравенство $\dfrac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geqslant 5.$

337. ($\pi - 98.3$) Решить неравенство $\dfrac{1}{|x+1|-1} \geqslant \dfrac{2}{|x+1|-2}.$

338. ($\gamma - 90.3$) Решить неравенство $\dfrac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1.$

339*. ($\varkappa - 91.3$) Решить неравенство $49^{\log_x 5} - 7^{\log_x 5} - 2 \geqslant 0.$

10 Перебор случаев

10.1 Раскрытие модулей

340. ($\varepsilon - 85.2$) Решить неравенство $x \log_{1/2}(1/3 - x) \geqslant |x|.$

341. ($\varkappa - 98.1$) Решить неравенство $2x > \dfrac{5x+3}{|x+2|}.$

342. ($\varepsilon - 84.3$) Решить неравенство $2|x-4| + |3x+5| \geqslant 16.$

343. ($\gamma - 96.1$) Решить уравнение

$$|5x-3| - |7x-4| = 2x - 1.$$

344. ($\lambda - 85.3$) Решить неравенство $\dfrac{|x-2|}{|x-1|-1} \geqslant 1.$

345. ($\psi - 79.3$) Решить неравенство $\dfrac{3}{|x+3|-1} \geqslant |x+2|.$

346. ($\alpha - 97.2$) Решить уравнение

$$4|x+1| - 1 = 3|2x+5| - 2|x+5|.$$

347. ($\beta - 98.1$) Решить неравенство

$$|x^2 + x - 2| + |x+4| \leqslant x^2 + 2x + 6.$$

348. ($\mu - 98.3$) Решить уравнение

$$3 \cdot 2^{\cos x + 3\sqrt{1-\sin^2 x}} + 11 \cdot 2^{2\cos x} - 34 = 0.$$

349*. ($\zeta - 92.7$) Нечетная функция f, определенная на всей числовой прямой, при $x > 0$ задается формулой
$$f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Какой формулой задается эта функция при $x < 0$? Решить уравнение $f(x) = 1/2$.

10.2 Исследование основания логарифма или степени

350. ($\gamma - 85.2$) Решить неравенство $\log_x (3 - x) > 1$.

351. ($\varphi - 92.2$) Решить неравенство
$$\log_x (20x + 3x^2 - x^3) \geqslant 3.$$

352. ($\varepsilon - 93.1$) Решить неравенство $\log_{7x-6} 25 < 2$.

353. ($\alpha - 91.5$) Решить неравенство
$$\log_{(\log_{1/2} x)} (\log_{1/7} x) > 0.$$

354. ($\varkappa - 96.2$) Решить уравнение
$$\log_{(2x+3)}(x-2)^2 = \log_{(x/6+1/2)}(x-2)^2.$$

355. ($\varkappa - 81.2$) Решить уравнение
$$\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{1/25} (2+5x-x^2)}.$$

356. ($\varepsilon - 77.3$) Решить систему
$$\begin{cases} x^{y+4x} = y^{5(y-x/3)} \\ x^3 = y^{-1} \\ x > 0. \end{cases}$$

10.3 Зависимость от параметра

357*. ($\mu - 92.3$) Для данных чисел $a = \log_y x$ и $b = \log_z x$ найти число
$$\log_{\sqrt[3]{xyz}} \left(\frac{yz}{x^3}\right)^2.$$

358. ($\alpha - 96.6$) Найти все a, при которых неравенство
$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}\right)>0$$
выполняется для всех x.

359. ($\varkappa - 82.5$) При каждом a решить уравнение
$$|x+3|-a|x-1|=4.$$

360*. ($\zeta - 84.4$) Найти все a, при которых уравнение
$$2|x-a|+a-4+x=0$$
имеет хотя бы один корень, причем все его корни принадлежат отрезку $[0;4]$.

361. ($\varepsilon - 78.3$) Найти все a, при которых система
$$\begin{cases} ax+2y=a+2 \\ 2ax+(a+1)y=2a+4 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

362. ($\mu - 95.3$) Найти все a, при которых любое решение системы
$$\begin{cases} x-a^2\log_3 y=1 \\ x+3a\log_3 y=1 \end{cases}$$
удовлетворяет неравенству $y>1-x$.

363*. ($\mu - 86.5$) Найти все a, при каждом из которых для любого b система
$$\begin{cases} x-by+az^2=0 \\ 2bx+(b-6)y-8z=8 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

364. ($\gamma - 92.2$) Найти все тройки чисел a, b, c, при которых уравнение
$$ax^2+bx+c=0$$
имеет единственный корень $x=-1$, причем $a+b+c=1$.

365. ($\sigma - 98.5$) Найти все натуральные n, при которых задача о нахождении арифметической прогрессии по ее семнадцатому члену и сумме n первых членов либо имеет более одного решения, либо не имеет ни одного.

366. ($\mu - 95.1$) Найти первый член геометрической прогрессии, если третий ее член равен -10, а седьмой член в сумме с квадратом третьего дает утроенный пятый член.

367. ($\gamma - 98.2$) Найти знаменатель геометрической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна -7, а пятый член меньше второго на 14, но больше шестого.

368. (λ – 86.4) Студенческий стройотряд за 820 руб. оборудовал прямоугольную спортплощадку площадью 0,1 га, установив с противоположных более длинных сторон трибуны, а с двух других — проволочную сетку. Стоимость установки одного погонного метра трибун и сетки равна соответственно 7 руб. и 3 руб. Найти длины сторон площадки.

369*. (β – 86.3) Два лыжника вышли со старта одновременно по одному и тому же маршруту, причем скорость первого лыжника составила 7/6 скорости второго. Через 20 мин вслед за ними со скоростью 18 км/ч отправился третий лыжник, который догнал второго на 30 мин раньше, чем первого. Найти скорость первого лыжника.

370*. (μ – 87.4) Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них увеличил скорость на 25 км/ч, а другой — на 20, то они прибыли бы на станцию C также одновременно, но на 2 ч раньше. Найти скорости поездов.

371*. (ε – 81.5) В двух сосудах емкостью по 15 л каждый находилось всего 15 л спирта. Первый сосуд долили доверху водой, после чего второй сосуд долили доверху смесью из первого. Затем из второго сосуда отлили в первый 6 л смеси, после чего в первом сосуде оказалось спирта на 1 л

больше, чем во втором. Сколько литров спирта было первоначально во втором сосуде?

10.5 Целочисленный перебор

372. ($\sigma - 86.5$) Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0 \\ x + 2y < 15/2. \end{cases}$$

373*. ($\varphi - 98.4$) А, И, Б сидели на трубе в указанном порядке. К ним стали подсаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих букв. С некоторого момента буквы стали циклически повторяться.

1) Какая буква в циклически повторяющемся наборе встречалась наиболее часто?

2) Может ли циклически повторяющийся набор при каких-либо других начальных буквах состоять из одной буквы? Если да, то из какой?

374. ($\alpha - 98.6$) Ученик перемножил два данных натуральных числа и допустил ошибку, увеличив произведение на 372. Поделив для проверки полученный результат на меньшее из данных чисел, ученик получил в частном 90 и в остатке 29. Найти данные числа.

375. ($\mu - 92.4$) Мастер делает в час целое число деталей, большее 5, а ученик — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе — на 1 ч быстрее. Из скольких деталей состоит заказ?

376. ($\varepsilon - 83.5$) На факультет подано от школьников на 600 заявлений больше, чем от производственников. Девушек среди школьников больше, чем среди производствен-

ников в 5 раз, а юношей среди школьников больше, чем среди производственников, в n раз, где n — целое число, и $6 \leqslant n \leqslant 13$. Найти общее количество заявлений, если среди производственников юношей на 20 больше, чем девушек.

377*. ($\varkappa - 82.4$) Имеется два проекта застройки микрорайона. По первому проекту предполагается построить несколько одинаковых домов, содержащих в общей сложности 12096 квартир. По второму проекту предполагается построить на 8 домов больше, причем домов также одинаковых, но с бо́льшим числом квартир в каждом и содержащих в общей сложности 23625 квартир. Сколько домов предполагается построить по первому проекту?

378*. ($\varepsilon - 86.3$) Линию, связывающую два города, обслуживают самолеты трех типов. Каждый самолет первого, второго и третьего типа может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найти число действующих на линии самолетов каждого типа, если их общее число не превосходит 8.

11 Развитие метода интервалов

11.1 Обобщенный метод интервалов

379. ($\lambda - 95.4$) Решить неравенство $\dfrac{3^x - 2}{x^2 - 6x + 5} \leqslant 0$.

380. ($\mu - 83.1$) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{2x + 5} \geqslant \frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x + 4}.$$

381. ($\pi - 80.4$) Решить неравенство

$$(4x^2 - 16x + 7)\log_2(x - 3) > 0.$$

382. ($\mu - 89.2$) Решить неравенство

$$\frac{\log_3(1-2x-x^2)}{\log_{3-\sqrt{5}}(x+1+\sqrt{2})} \geqslant 0.$$

383. ($\mu - 98.2$) Решить неравенство

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2+x-2) \leqslant 0.$$

384. ($\mu - 97.2$) Решить неравенство $\log_{x+1} \dfrac{x^2+3x-4}{2x-4} \leqslant 1.$

385. ($\varkappa - 98.2$) Решить неравенство

$$\log_2(5-x) \cdot \log_{x+1} \frac{1}{8} \geqslant -6.$$

386. ($\mu - 97.2$) Решить неравенство

$$(1-x/2)\log_{(13-3\cdot 2^x)} 4 \leqslant 1.$$

387. ($\varkappa - 97.2$) Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{1-x^2}} 2 < \log_{2x^2} \frac{1}{2}.$$

388*. ($\mu - 94.3$) Решить неравенство

$$\log_{(2-5x)} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \leqslant \frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}.$$

11.2 Метод областей

389. ($\varepsilon - 91.5$) Найти площадь фигуры, заданной неравенством

$$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-x-y) \leqslant 0.$$

390*. ($\pi - 96.6$) Найти площадь фигуры, заданной неравенством

$$\log_{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}(x-y) > 1.$$

391. ($\lambda - 81.4$) Найти площадь фигуры, заданной неравенством

$$|x| + |y-1| \leqslant 4.$$

392. (ε – 94.4) Найти уравнение наименьшей окружности, которая ограничивает фигуру, заданную неравенством

$$|2y+3x-2|+|3x+6|<6.$$

393. (λ – 95.8) Найти площадь фигуры, заданной неравенством

$$x^2+y^2+6(x-|y|)\leqslant 0.$$

394. (ε – 88.4) Найти площадь фигуры, заданной неравенством

$$\left|y-\frac{1}{2}x^2\right|+\left|y+\frac{1}{2}x^2\right|\leqslant 2+x.$$

12 Разложение на множители

12.1 Разложение с помощью формул тригонометрии

395. ($\varkappa$ – 88.2) Решить уравнение

$$\cos 7x+\cos x=2\cos 3x(\sin 2x-1).$$

396. (φ – 78.3) Решить уравнение

$$5\sin x+6\sin 2x+5\sin 3x+\sin 4x=0.$$

397*. (χ – 79.1) Решить уравнение

$$\sin 2x-\cos 2x=1+\sqrt{2}\cos x.$$

398. (β – 89.3) Решить уравнение

$$\sin x(3\sin 2x\sin^3 x+ \\ +12\sin 2x\sin x-16\cos x)+2\sin 4x=0.$$

399*. (ζ – 98.1) Решить уравнение

$$4\cos x\cos 2x\sin 3x=\sin 2x.$$

400. (π – 89.2) Решить уравнение

$$\sqrt{3}\cos^2 x-2\sin 2x\cos 2x-\sqrt{3}\sin^2 x=0.$$

401. (α – 98.1) Решить уравнение $\sin^2 x+\sin^2 6x=1$.

402*. (β – 77.4) Решить уравнение
$$\sqrt{2}\cos\left(\tfrac{x}{5}-\tfrac{\pi}{12}\right)-\sqrt{6}\sin\left(\tfrac{x}{5}-\tfrac{\pi}{12}\right)=$$
$$=2\sin\left(\tfrac{x}{5}+\tfrac{2\pi}{3}\right)-2\sin\left(\tfrac{3x}{5}+\tfrac{\pi}{6}\right).$$

403. (γ – 80.4) Решить уравнение
$$\sin^8 x-\cos^8 x=\frac{1}{2}\cos^2 2x-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

12.2 Дублирование корней в ответе

404. (β – 82.2) Решить уравнение $\sin^2 x+\cos^2 3x=1$.

405. (γ – 82.2) Решить уравнение $\sin x\sin 3x+\cos 4x=0$.

406. (χ – 96.1) Решить уравнение $\sin 5x-\sin x\cos 4x=0$.

407*. (λ – 77.3) Решить уравнение
$$\sin^2(1{,}5x)+\sin^2(\pi/4-2{,}5x)=$$
$$=\sin^2(5{,}5x)+\sin^2(\pi/4-6{,}5x).$$

12.3 Использование однородности

408. (α – 97.3) Решить уравнение
$$5\sin^2 x+3\sin x\cos x-4=0.$$

409. (ζ – 98.1) Решить уравнение
$$\cos 4x-\sin 3x\cos x+\cos 2x=0.$$

410. (π – 79.3) Решить уравнение
$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x=(\sqrt{3}-1)\cos^2 x+1.$$

411. (ζ – 96.3) Решить уравнение $3^{2x}=((0{,}6)^x+2)\,25^x$.

412. (γ – 94.2) Решить неравенство $9^x>4^x-6^x$.

413. (ε – 82.3) Решить неравенство
$$5\cdot 25^{1/x}+3\cdot 10^{1/x}<2\cdot 4^{1/x}.$$

414*. ($\psi - 85.6$) Найти все a, при каждом из которых существует единственная целочисленная пара (x, y), удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} 3x^2 + 11xy + 10y^2 = 7 \\ x + y > 0 \\ 4a^2x - 3ay < 0. \end{cases}$$

415. ($\alpha - 96.5$) Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Найти $\angle BDC$, если $BD : EC = 1 : 2$, $BE : AD = 2 : 7$ и $\angle B = 60°$.

12.4 Разные методы разложения на множители

416. ($\pi - 93.2$) Решить уравнение

$$\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0.$$

417. ($\zeta - 97.1$) Решить уравнение $\cos 6x + 4\cos 2x = 0$.

418*. ($\psi - 91.2$) Решить уравнение

$$(\cos x - 1)(\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x - 1) = \sin^2 x.$$

419. ($\zeta - 84.3$) Решить неравенство $2^{x+3} + 2x^3 \leqslant 16 + 2^x x^3$.

420. ($\pi - 78.5$) Решить уравнение

$$\sqrt{x}\,(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18.$$

421. ($\beta - 83.2$) Решить уравнение

$$(x-4)^2 \log_4 (x-1) - 2\log_4 (x-1)^2 = (x-4)^2 \log_{(x-1)} 4 - 2\log_{(x-1)} 16.$$

422. ($\alpha - 95.2$) Решить уравнение

$$\log_2 (x^2 - 4x + 3) - \log_2 (x-1) \cdot \log_2 (x-3) = 1.$$

423. ($\lambda - 97.5$) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} a(x-4) = 3(y+2) \\ y + \sqrt{x} = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

424*. ($\mu - 87.5$) Найти все пары (a, b), при которых система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти различных решений.

12.5 Уравнения третьей и четвертой степени

425. ($\psi - 88.2$) Решить уравнение $8^{4(x^3+8)} = 16^{7(x^2+2x)}$.

426. ($\gamma - 91.5$) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} 8xy - 25 = 0 \\ x^2 = y + 2x \\ x^2 + y^2 \leqslant a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

427*. ($\alpha - 98.7$) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}\,y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0 \\ y = \sqrt{a+3}\,x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

428*. ($\mu - 96.6$) Найти все a, при которых уравнение

$$(x^2 - x + a^2 + 2)^2 = 4a^2(2x^2 - x + 2)$$

имеет ровно три различных корня.

429. ($\varepsilon - 79.3$) Из сосуда, первоначально наполненного спиртом, отлили 2 л и долили 2 л воды. Когда эту операцию проделали еще два раза, спирта в сосуде стало на 3 л меньше, чем воды. Сколько спирта и сколько воды стало в сосуде?

13 Возведение уравнений и неравенств в квадрат

13.1 Иррациональные уравнения

430. ($\psi - 96.1$) Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 21x + 4} = 2 - 11x.$$

431. ($\chi - 97.1$) Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 25x + 51} = 7 - 2x.$$

432. ($\zeta - 85.2$) Решить уравнение $\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x$.

433. ($\pi - 98.1$) Решить уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3} = 1$.

434. ($\varepsilon - 82.2$) Решить уравнение
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = \sqrt{x-2}.$$

13.2 Иррациональные неравенства

435. ($\lambda - 84.2$) Решить неравенство
$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leqslant 3x - 3.$$

436. ($\lambda - 92.2$) Решить неравенство $\sqrt{10x - 1} + 1 \leqslant 5x$.

437. ($\beta - 80.3$) Решить неравенство
$$\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x.$$

438. ($\varepsilon - 95.1$) Решить неравенство $2x - 5 < \sqrt{x^2 - x - 6}$.

439. ($\varepsilon - 98.1$) Решить неравенство
$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

440*. ($\psi - 93.2$) Решить неравенство
$$\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > 1/\sqrt{3}.$$

13.3 Разные задачи на возведение в квадрат

441. ($\varphi - 90.1$) Решить уравнение
$$\sqrt{10}\cos x - \sqrt{4\cos x - \cos 2x} = 0.$$

442. ($\mu - 96.2$) Решить неравенство
$$\sqrt{17 \cdot 9^x - 4^x} \geqslant 3^x - 3 \cdot 2^x.$$

443. ($\alpha - 96.4$) Решить неравенство
$$\log_{1/2}(\sqrt{x+2} - x + 4) \geqslant -1 + \log_{1/2} 3.$$

444. ($\alpha - 98.5$) Решить неравенство
$$\log_{2x-3}(\sqrt{x+2} + x - 3) \leqslant 1.$$

445. ($\mu - 90.3$) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x^3} - 1}{1+x} \leqslant x$.

446*. (ε – 88.3) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} > 1.$$

447*. (μ – 89.2) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{\log_3(5/2-x)+\log_3 2} \leqslant 0.$$

448. (ζ – 97.3) Решить неравенство
$$\sqrt{x^2+x+4} \leqslant 2x+|3x-2|.$$

449. (μ – 96.2) Решить неравенство
$$\frac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|} \leqslant \sqrt{4x-3}.$$

450*. (γ – 94.3) Решить систему
$$\begin{cases} \log_2(10-3y)+\log_{1/2}(2y-5x)=0 \\ \sqrt{x+2y+1}-\sqrt{11-3y}=\sqrt{2x+4y-12}. \end{cases}$$

451. (α – 97.5) Найти площадь фигуры, заданной системой
$$\begin{cases} \sqrt{4-x^2} \geqslant -y \\ y \leqslant -|x+1|+3. \end{cases}$$

452. (ψ – 89.5) При каждом a решить неравенство
$$x+2a-\sqrt{3ax+4a^2} > 0.$$

453. (ζ – 97.7) При каждом a решить неравенство
$$a-2 < (a-1)\sqrt{x+1}.$$

454. (λ – 95.7) При каждом a решить неравенство
$$g(f(x)) \leqslant 0,$$
где $f(x)=\sqrt{x}-a$ и $g(x)=\sqrt{x^2-4x+4}-3$.

455. (β – 78.3) Прямая AB касается в точке B данной окружности с центром O и радиусом 2, $\angle OAB=\pi/3$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AB, AO и данной окружности.

14 Тригонометрические уравнения, неравенства и системы

14.1 Выбор корней из данного промежутка

456. (β – 88.1) Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$$6\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+1=0.$$

457. (μ – 87.1) Решить уравнение $\cos\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

458. (φ – 88.3) Найти все корни уравнения

$$2\sin^2 x+\cos 4x=0,$$

удовлетворяющие условию $|x|<2$.

459. (λ – 95.5) Решить уравнение

$$\left(2\sqrt{3}\sin(\pi x+3\pi)-\operatorname{tg}(\pi x-\pi/2)\right)\log_2(4-x^2)=0.$$

460*. (ψ – 98.4) Найти все корни уравнения

$$\operatorname{tg}8x-\operatorname{tg}6x=\frac{1}{\sin 4x}$$

на отрезке $[-\pi/4;3\pi/4]$.

461. (β – 94.3) Найти все корни уравнения

$$3\operatorname{tg}^2(\pi x-\pi/8)=1$$

на интервале $(3/2;3)$.

462*. ($\varkappa$ – 91.2) Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right)=1$.

14.2 Учет тригонометрических неравенств

463. (μ – 94.1) Решить уравнение $\dfrac{4\sin x-2\cos 2x-1}{\cos 2x+\sqrt{3}\cos x-2}=0$.

464. (μ – 89.1) Решить уравнение

$$\left(36^{5x\operatorname{tg}x}\right)^x\ 6^{\pi^2\operatorname{tg}x}=6^{7\pi x\operatorname{tg}x}.$$

465. (λ – 80.2) Решить уравнение $\dfrac{2-3\sin x-\cos 2x}{6x^2-\pi x-\pi^2}=0$.

466. (ε – 77.1) Решить уравнение $\dfrac{\cos x}{(x+\frac{3}{2})^2} = |\cos x|$.

467*. ($\varkappa$ – 98.3) Решить уравнение

$$|\sin^3 x| + 13\cos^3 x - \cos x = 0.$$

468. (γ – 96.3) Решить уравнение

$$\log_{(-\sin x)}(\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x + 1) = 0.$$

469. (μ – 97.1) Решить уравнение

$$(2\sin^2 x - 3\sin x + 1)\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0.$$

470. (β – 98.1) Решить уравнение

$$\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\sin x(\cos x - 2/3).$$

471. (ε – 96.4) Решить уравнение $\sqrt[4]{12}\sin x = \sqrt{\sin 2x}$.

472. (χ – 92.2) Решить неравенство $\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$.

473. (χ – 98.3) Найти все решения двойного неравенства

$$(4+\sqrt{3})\sin x + 2\sqrt{3} + 1 \leqslant \cos 2x \leqslant 5\cos x - 3$$

на отрезке $[-\pi; \pi]$.

14.3 Трудности при отборе корней

474. ($\varkappa$ – 97.2) Решить уравнение

$$\frac{6\sin x - 2\cos 2x - 4\cos^2 x - 3}{\sqrt{7}\sin x - 3\cos x} = 0.$$

475*. (ε – 82.4) Решить уравнение $\dfrac{\sin 4x}{\sin 6x} = 1$.

476. (π – 98.4) Решить уравнение $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 2x = -\operatorname{tg} 3x$.

477. (μ – 77.3) Решить уравнение

$$3^{1/2+\log_3 \cos x} + 6^{1/2} = 9^{1/2+\log_9 \sin x}.$$

478*. (π – 96.4) Найти все корни уравнения

$$\sqrt{x+\sin x} = \sqrt{x - \sin 2x}$$

на интервале $(-2\pi; 2\pi)$.

479. (ε – 87.1) Решить уравнение

$$(2\sin x - 1)\sqrt{\cos(x+3\pi/4)} = 0.$$

480*. ($\varkappa - 98.3$) Решить уравнение
$$\operatorname{tg} x\sqrt{\sin x - 2\cos x - 1} = 0.$$

481*. ($\mu - 98.2$) Найти все корни уравнения
$$2\cos\tfrac{x}{3} + 2\left(\sqrt{5}-1\right)\sin\tfrac{x}{6} = 2 - \sqrt{5},$$
удовлетворяющие неравенству $\cos\frac{3x}{4} < 0$.

482*. ($\gamma - 77.5$) Решить уравнение
$$2\sin(3x + \pi/4) = \sqrt{1 + 8\sin 2x\cos^2 2x}.$$

483*. ($\mu - 83.2$) Решить уравнение
$$\log_2\left(\cos 2x + \cos\tfrac{x}{2}\right) + \log_{1/2}\left(\sin x + \cos\tfrac{x}{2}\right) = 0.$$

15 Перебор случаев в геометрии

15.1 Обоснование геометрической конфигурации

484. ($\varepsilon - 78.2$) Найти сторону квадрата $ABCD$ площадью, большей 225, если некоторая точка M расположена на плоскости так, что $MB = MD = 13$ и $MC = 5\sqrt{2}$. Где лежит точка M: вне квадрата или внутри него?

485. ($\varphi - 82.4$) Диагонали параллелограмма $ABCD$ относятся, как $1 : \sqrt{3}$, $AB = BD = 1$. Найти площадь той части круга, описанного около треугольника BCD, которая не принадлежит кругу, описанному около треугольника ACD.

486*. ($\psi - 97.5$) Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Через точку B их общей касательной AB проведены две прямые: одна пересекает первую окружность в точках K и L, а другая — вторую окружность в точках M и N. Прямые KN и LM пересекаются в точке P. Найти отношение площадей треугольников KLP и MNP, если $AB = 6$, $BL = 9$ и $BM = 5$.

487*. ($\beta - 89.4$) В окружность радиуса 2 вписан правильный шестиугольник. На продолжении его стороны AB за

точку A взята точка C так, что $AC = \sqrt{11} - 1$. Из точки C к окружности проведена секущая CD с внешней частью $CE = 2$. Найти $\angle BCD$, если угол DBE — тупой.

15.2 Перебор вариантов расположения

488. (μ – 79.2) Через концы A и B диаметра окружности проведены два луча, пересекающие одну из полуокружностей AB в точках C и D соответственно. Прямые AD и BC пересекаются в точке E. Найти радиус окружности, если $CE = DE = 1$ и $\angle BAD = 60°$.

489. (μ – 96.3) Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, а M — середина стороны AB. Найти площадь этого треугольника, если описанная около треугольника AMO окружность пересекает прямую AC в точке N, $MN = 8$, $AN = 7$ и $\angle MOA = 45°$.

490. (γ – 97.2) Две касающиеся друг друга окружности радиусов $r_1 < r_2$ касаются внутренним образом третьей окружности. Центры окружностей служат вершинами равнобедренного треугольника, угол при основании которого больше 70°. Найти периметр этого треугольника.

491. (μ – 87.3) Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4 и $AC = BC$. На прямой AB взята точка D, удаленная от прямых AC и BC на расстояния 11 и 3 соответственно. Найти $\cos \angle CBD$.

492*. (π – 84.4) На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку C выбрана точка M так, что $\angle BAM = 75°$. Прямая AM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке N, расположенной между A и M. Найти AN, если $AB = c$, $AC = b$ и $\angle BAC = 45°$.

493. (μ – 95.5) Три параллельные прямые касаются в точках A, B и C сферы с центром O и радиусом 4. Найти

$\angle ABC$, если площадь треугольника AOC равна 4, а площадь треугольника ABC — больше 16.

494. ($\lambda - 85.6$) На ребре $BC = 4$ куба $ABCDA'B'C'D'$ взята середина M, а на ребре $A'D'$ — такая точка N, что $A'N = 1$. Найти длину кратчайшего пути из точки M в точку N по поверхности куба.

495. (ψ – 79.4) Вне правильного тетраэдра $ABCD$ взята такая точка M, что $MA = MB = MC = \sqrt{97}$, $MD = \sqrt{2}$. Найти объем тетраэдра.

496. (μ – 86.6) Стороны AB и CD основания $ABCD$ четырехугольной пирамиды $SABCD$ параллельны, $AB = 6$, $AD = 4$, $AS = 2\sqrt{14}$ и $\angle BAD = 120°$. Найти объем пирамиды, если через каждую из прямых AB и CD можно провести по плоскости, которые не содержат основание пирамиды и пересекают ее по равным четырехугольникам.

15.3 Неоднозначность в ответе

497. ($\psi - 91.4$) Точки K, L и M делят, соответственно, стороны AB, BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ в отношении $AK : KB = CL : LB = CM : MD = 1 : 2$. Найти площадь четырехугольника, если $KL = 4$, $LM = 3$, а радиус описанной около треугольника KLM окружности равен $5/2$.

498. (ε – 91.3) Окружность диаметром $\sqrt{10}$ проходит через вершины A и B прямоугольника $ABCD$, а касательная к ней, проведенная из точки C, равна 3. Найти BC, если $AB = 1$.

499. ($\chi - 98.5$) Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке K, хорды CD и EF — в точке L, а хорды AB и EF — в точке M. Найти радиус окружности, если $BK = AM$, $CK = DL$, $FL = 5$, $LM = 4$ и $\angle LKM = \pi/4$.

500. (ζ – 88.6) Боковые грани пирамиды $SABC$ одинаково наклонены к основанию ABC, $AC = 3$, $BC = 4$, $SC = \sqrt{38}$, $\angle ACB = 90°$. В пирамиду вписан цилиндр: нижнее его основание лежит в плоскости ABC, а верхнее основание имеет по одной общей точке с каждой боковой гранью. Найти радиус основания цилиндра, если площадь его боковой поверхности равна $8\pi/3$.

Метод равносильных преобразований

16 Сравнение чисел и выражений

16.1 Задачи на сравнение

501. ($\varkappa - 92.1$) Что больше: $\sqrt[5]{\dfrac{1990}{1992}}$ или $\sqrt[5]{\dfrac{1989}{1991}}$?

502. ($\beta - 94.2$) Что меньше: $\sqrt{11}$ или $9^{\frac{1}{2}\log_3(1+\frac{1}{9})+\frac{3}{2}\log_8 2}$?

503. ($\varepsilon - 88.1$) Что меньше: $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}$ или 3 ?

504. ($\lambda - 85.1$) Что больше:

$$3^{\log_2 5} + 10^{\frac{1}{3}\lg 2} \text{ или } 5^{\log_2 3} + \sqrt[10]{10}\,?$$

505. ($\pi - 98.2$) Найти $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$ и $\pi < \alpha < 2\pi$. Что больше: $|\cos\frac{\alpha}{2}|$ или $\sqrt{17}/13$?

506. ($\varkappa - 79.1$) Первый член арифметической прогрессии равен 3, а разность — 6. Первый член геометрической прогрессии также равен 3, а знаменатель — $\sqrt{2}$. Что больше: сумма первых шести членов арифметической прогрессии или сумма первых восьми членов геометрической прогрессии?

507. ($\lambda - 94.8$) Из пункта A в пункт B можно доехать тремя маршрутами: через пункт C, через пункт D или напрямую. Пункт A связан с пунктами B, C и D грунтовыми дорогами, а пункт B с пунктами C и D — шоссейными, причем $AB = 80$ км, $AC = 40$ км, $AD = 30$ км, $CB = 60$ км, $DB = 100$ км. Скорость по грунтовой дороге — больше 15 км/ч, но на 40 км/ч меньше, чем по шоссе, и не превышает 30 км/ч. По какому маршруту можно быстрее добраться из A в B ?

16.2 Сравнение чисел в процессе решения

508. ($\varkappa - 87.2$) Сколько различных корней имеет уравнение

$$\sqrt{6}\,x^2 + 2x\sqrt{3} + 3 = -2x\ ?$$

509. ($\mu - 87.2$) Решить неравенство

$$\log_{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}(7x - 2x^2 - 6) > 2.$$

510. ($\lambda - 96.2$) Какие из чисел $-4, -1, 1, 4$ являются решениями неравенства

$$|1/2 - \lg 5|\, x \leqslant 1/2 - \lg 5\ ?$$

511. ($\lambda - 88.1$) Решить уравнение

$$(x-2)(|x| + \sqrt{3} - 1 - 1/\sqrt{2}) = 0.$$

512. ($\gamma - 89.3$) Решить неравенство

$$\log_{(10-x^2)}\left(\frac{16}{5}x - x^2\right) < 1.$$

513. ($\psi - 79.1$) Решить уравнение

$$\sqrt{3 + 4\sqrt{6} - (16\sqrt{3} - 8\sqrt{2})\cos x} = 4\cos x - \sqrt{3}.$$

514. ($\varkappa - 95.3$) Найти все корни уравнения

$$2^{\cos x} + 5 \cdot 2^{-\cos x} = 2\sqrt{6}$$

на интервале $(\pi/3; 7\pi/3)$.

515*. ($\mu - 97.3$) Найти ближайший к числу $13\pi/4$ корень уравнения

$$\sin x \cos 2x + \sin x + \frac{10}{11}\sin 2x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{30}{44}$$

516. ($\mu - 84.4$) Решить систему

$$\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

517. ($\zeta - 91.5$) Найти все a, при которых все корни уравнения

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$$

удовлетворяют неравенству $|x| < 1$.

16.3 Числовые оценки в геометрии

518. ($\varkappa - 85.2$) В трапеции $ABCD$ основание BC равно 10, $BD = 19$ и $\angle ADB = 30°$. Что больше: BC или CD ?

519. ($\varepsilon - 79.2$) На плоскости расположены точка M и прямоугольник $ABCD$ с диагональю 10 и площадью 48. Найти расстояние от точки M до наиболее удаленной от нее вершины прямоугольника, если $MB = MD = 13$.

520. ($\lambda - 97.6$) В ромб, одна из диагоналей которого равна 10, вписан круг радиуса 3. Найти площадь S части ромба, лежащей вне круга. Что больше: S или 9?

521. ($\mu - 84.3$) На луче, выходящем из середины D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC под прямым углом к ней и пересекающем один из катетов этого треугольника, отложен отрезок DE, равный половине AB. Отрезок $CE = 1$ равен одному из катетов. Найти площадь треугольника ABC и вычислить ее приближенное значение с точностью до 0,01.

522. ($\pi - 97.5$) Найти высоту CH треугольника ABC, если она меньше $\sqrt{3/2}$, $AC = 2$, $BC = 3$, а расстояние от центра описанной около треугольника ABC окружности до стороны AB равно половине радиуса этой окружности.

523*. ($\psi - 94.3$) На стороне $AB = 14$ тупоугольного треугольника ABC взята точка L, равноудаленная от прямых AC и BC, а на отрезке AL — точка M, равноудаленная от вершин A и B. Найти $\sin \angle C$, если $ML = 1$ и $\angle A = 45°$.

524*. ($\varphi - 83.4$) Сторона AD — основание трапеции $ABCD$, $\angle A = 90°$, $\angle C = 150°$ и $AD = CD = 14/3$. Точка E находится на расстоянии $7/5$ от прямой AD в той же полуплоскости от нее, что и точка B, $AE = DE$. Найти площадь общей части трапеции $ABCD$ и треугольника AED.

16.4 Цепочки неравенств

525. (μ – 93.1) Решить неравенство
$$\frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{(x+1)} 11} \geqslant \frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11}.$$

526. (ε – 90.1) Имеет ли область значений функции
$$y(x) = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}\,x - 2x^2$$
общие точки с промежутком $[\log_3 15; \infty)$?

527. (γ – 79.5) Найти все решения неравенства
$$\cos\tfrac{3}{2} - 4x - x^2 \geqslant 0$$
на интервале $(-33/8; 0)$.

528*. (γ – 96.4) Решить неравенство
$$\frac{\left(3x - 2\arccos(-\frac{1}{2})\right)\ (x - \log_{\sqrt{3}} 2\sqrt{7})^2}{x - 8\sin\frac{241\pi}{12}} \leqslant 0.$$

529. (λ – 86.3) Решить уравнение $\dfrac{2\cdot 6^x - 4^x - 3}{6^x - 9^x - 1} = 3.$

530. (λ – 83.2) В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = 2$, катетом $AC = 1$ и биссектрисой AL, M — точка пересечения медиан. Что больше: AL или AM ?

531. (β – 86.4) На стороне $AC = 3\sqrt{3}$ треугольника ABC взята точка M так, что $AM : MC = 1 : 2$. Через точку M проведена прямая, параллельная AB и пересекающая сторону $BC = \sqrt{13}$ в точке N. Биссектриса угла A пересекает отрезок MN в точке L, а радиус описанной около треугольника AML окружности равен $\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}$. Найти AB.

532*. (γ – 87.3) Окружность радиуса $2\sqrt{5}$, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, касается прямой AC в точке A и высекает на прямой BC отрезок длины $4\sqrt{5}$. Через точку B проведен перпендикуляр к прямой BC, пересекающий прямую AC в точке D. Найти площадь треугольника ABC, если $BD = 2$.

17 Некоторые особенности преобразований

17.1 Учет изменения области допустимых значений

533. ($\mu - 85.2$) Решить неравенство
$$\frac{1}{x-1}+\frac{3}{|x|+1}\geqslant\frac{1}{|x|-1}.$$

534. ($\varkappa - 78.2$) Решить уравнение
$$\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\left(\sin 4x\cos 5x-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\right)=$$
$$=\sec^2\frac{x}{2}\left(\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin 5x\cos 4x\right).$$

535. ($\varepsilon - 83.2$) Решить уравнение $\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}5x$.

536*. ($\mu - 84.2$) Найти ближайший к числу $\sqrt{11}$ корень уравнения
$$\frac{\sin 2\pi x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=0.$$

537. ($\alpha - 95.1$) Найти все x, при которых чи́сла -1, $x+2$, $\sin(\arcsin x)$ образуют геометрическую прогрессию.

538. ($\gamma - 83.2$) Решить неравенство
$$\log_2\left(\sqrt{x^2-4x}+3\right)>\log_{1/2}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}\right)+1.$$

539. ($\chi - 87.2$) Решить неравенство
$$4\log_2 x+\log_2\frac{x^2}{8(x-1)}\leqslant 4-\log_2(x-1)-\log_2^2 x.$$

540. ($\varphi - 78.4$) Решить уравнение
$$\log_9(x^2-5x+6)^2=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\frac{x-1}{2}+\log_3|x-3|.$$

541. ($\pi - 97.4$) Решить неравенство
$$\frac{\log_2^x 3-\log_2^2 3}{\log_2^{-x} 3-x\log_{2^x} 3}>0.$$

542. ($\mu - 96.1$) Решить уравнение
$$\log_{x+4}(x^3+10x^2+20x)\cdot\log_3(x+4)=\log_3(3x^2+8x).$$

543. (λ – 79.6) Найти все a, при которых уравнение
$$x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin a}} + \frac{9\sqrt{3}}{\cos a} + 36 = 0$$
имеет единственное решение.

17.2 Случаи неодинаковых оснований

544. (ψ – 78.1) Решить уравнение
$$\log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}.$$

545. (ε – 79.5) Решить неравенство
$$\frac{\log_5 (x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11} (x^2 - 4x - 11)^3}{2 - 5x - 3x^2} \geqslant 0.$$

546. (λ – 97.5) Решить неравенство
$$17^{\log_{1/17} \log_3 x} < 3^{\log_{1/3} \log_{17} x}.$$

547. ($\varkappa$ – 88.4) Решить неравенство $8^x \geqslant 6 \cdot 9^{|x-1|}$.

548*. (ε – 97.2) Решить неравенство
$$(1/2)^{\sqrt{(x^2-2x-15)^3}}\, 7^{(x+3)^2(x-5)} \leqslant 1.$$

549. (γ – 97.5) Решить систему
$$\begin{cases} 9^{2(1-x)} = 5^{x^2-8x+7} \\ \dfrac{\log_{0,2} \sqrt{x+3}}{\log_{0,2}(x+1)} < 1. \end{cases}$$

17.3 Специальные действия с радикалами

550. (χ – 97.2) Решить неравенство
$$(2 + \sqrt{3})^x + 2 < 3(2 - \sqrt{3})^x.$$

551. (μ – 95.1) Решить неравенство $\dfrac{4x + 15 - 4x^2}{\sqrt{4x+15} + 2x} \geqslant 0.$

552*. (λ – 85.5) Решить уравнение
$$\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \\ = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

553. (μ – 78.1) Вычислить $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$.

554. ($\varkappa$ – 93.1) Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(4x-x^2-2)\geqslant 0.$$

555. (μ – 95.2) Решить уравнение

$$\frac{|x^3|-|5x|}{\sqrt{2x^2-4x-1}-|x|+2}=0.$$

18 Преобразования систем

18.1 Метод подстановки

556. (π – 80.1) Решить систему

$$\begin{cases} x-y=6\\ x^3-y^3=126. \end{cases}$$

557. (ψ – 91.3) Решить систему

$$\begin{cases} \log_3 x-2^y+y=3\\ y\,2^y+2^y\log_3 x=4. \end{cases}$$

558. (φ – 80.3) Решить систему

$$\begin{cases} y-x=5\\ zx=(z-4)y+30\\ 2zx=(2z-4)y. \end{cases}$$

559. ($\varkappa$ – 95.1) Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2xy+x=14\\ xy\geqslant 9. \end{cases}$$

560*. (ψ – 77.2) Решить систему

$$\begin{cases} (1+2\log_{|xy|}2)\log_{x+y}|xy|=1\\ x-y=2\sqrt{3}. \end{cases}$$

18.2 Метод сложения

561. (ε – 79.4) Решить систему

$$\begin{cases} 3x^2+2y^2-3x+5y=3\\ 4,5x^2+3y^2-3x+8y=7. \end{cases}$$

562. ($\varphi - 82.3$) Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3 \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$$

563. ($\gamma - 95.1$) Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x}(x + 3y) = 36 \\ \sqrt{y}(3x + y) = 28. \end{cases}$$

564. ($\varphi - 77.4$) Решить систему

$$\begin{cases} x + \log_2 y = y \log_2 3 + \log_2 x \\ x \log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y. \end{cases}$$

565. ($\varepsilon - 81.4$) Решить систему

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -1/2 \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$$

566*. ($\zeta - 88.5$) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} axy + x - y + 3/2 = 0 \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

567. ($\lambda - 97.8$) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} (2x - 1)a^2 - (x^2 - x + 1)a - (x^3 - 4x^2 + 3) = 0 \\ (5 - 3x)a^2 + (5x^2 - 5x - 2)a - (2x^3 - 8x^2 + 6) = 0 \end{cases}$$

не имеет решений.

568*. ($\psi - 92.4$) Найти все пары $(a; b)$, при которых система

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2 + 7x = a \\ x^3 - 8x + b = 0 \end{cases}$$

имеет не менее двух различных решений.

18.3 Системы в текстовых задачах

569. ($\varepsilon - 87.2$) В магазине продано 10,5 т орехов трех сортов по цене 6, 4 и 2 руб. за килограмм на общую сумму 33 тыс. руб. Количества тонн проданных орехов первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано?

570. ($\lambda - 77.1$) Бак наполняется через одну из двух труб, причем через первую трубу — на 1 ч быстрее, чем через вто-

рую. За время наполнения бака через вторую трубу первая труба может пропустить 3 м^3 воды. Если бы емкость бака была на 2 м^3 больше, а пропускная способность второй трубы — на 4/3 м^3/ч больше, то за время наполнения бака через вторую трубу первая труба могла бы пропустить 2 м^3 воды. Найти емкость бака.

571. ($\beta-79.2$) Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, выехали одновременно навстречу друг другу пассажирский и скорый поезда, которые через некоторое время встретились. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на 3 ч раньше, а если бы со скоростью пассажирского — то на 5 ч позже фактического момента встречи. Найти скорости поездов.

572*. ($\chi-79.3$) От пристани A вниз по реке отправились одновременно пароход и плот. Пароход, дойдя до пристани B, расположенной в 324 км от A, простоял там 18 ч и отправился назад. В тот момент, когда он находился в 180 км от A, второй пароход, отправившийся из A на 40 ч позже первого и имеющий ту же собственную скорость, нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км. Найти собственную скорость пароходов и скорость течения реки.

19 Необычные равносильные преобразования

19.1 Экзотические системы и совокупности

573. ($\lambda-84.3$) Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos 2\alpha \leqslant -7/8$ и $\cos\alpha \leqslant -1/4$.

574. ($\mu-94.4$) Найти все x, при которых наибольшее из чисел $3x-4$ и $\log_2(5\cdot 2^{2x-4}-2^{x-1}+1)$ положительно.

575. ($\mu-95.4$) Найти все $x\in[0;\pi]$, при которых выражения $\operatorname{tg} x$ и $\dfrac{1}{\cos 2x}-2\cos 2x$ имеют разные знаки.

576. ($\varepsilon - 77.5$) Найти все a, при которых неравенство
$$25y^2 + 1/100 \geqslant x - axy + y - 25x^2$$
выполняется для всех таких пар $(x; y)$, что $|x| = |y|$.

577*. ($\gamma - 96.6$) Найти все a, при которых многочлен
$$f(x) = x^3 - (4+a)x^2 + 5ax - a^2$$
имеет три корня, являющиеся квадратами сторон некоторого неостроугольного треугольника.

19.2 Различные способы избавления от модулей

578. ($\lambda - 91.2$) Решить уравнение $|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0$.

579. ($\varkappa - 97.3$) Решить систему
$$\begin{cases} |x^2 - 4y + 3| + y = 1 \\ 2x + 2y = 1. \end{cases}$$

580. ($\psi - 98.1$) Решить уравнение $|4x - |x-2| + 3| = 16$.

581. ($\zeta - 97.5$) Решить систему
$$\begin{cases} y + |x+1| = 1 \\ |y - x| = 5. \end{cases}$$

582. ($\zeta - 98.2$) Решить неравенство $|x^2 + 2x - 8| > 2x$.

583. ($\mu - 93.1$) Решить неравенство
$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{35x} > \frac{1}{7} \cdot 7^{|4x^2 - 12x - 1|}.$$

584. ($\beta - 83.3$) Решить неравенство $8 + 6\,|3 - \sqrt{x+5}| > x$.

585*. ($\mu - 98.2$) Решить неравенство
$$\frac{1 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+4} + \log_{1/2}(13 - x)}{|x^2 + 2x - 3| - |2x^2 - 10x + 8|} \geqslant 0.$$

586. ($\mu - 92.1$) Решить уравнение
$$6\sin(x + \pi/3) + |\sin(x - \pi/6)| = 1.$$

587*. ($\varkappa - 81.5$) Найти все решения уравнения
$$|\sin(2x - 1)| = \cos x,$$
удовлетворяющие условию $|x| \leqslant 2\pi$.

20 Область значений и экстремумы функций

20.1 Исследование функций без производной

588. ($\varepsilon - 94.2$) Найти область значений функции
$$f(x) = -\sqrt{-3x^2 + 12x - 3}.$$

589. ($\varphi - 78.4$) Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1/2.$$

590•. ($\varepsilon - 81.6$) Доказать, что функция
$$f(x) = \sin^2 x - 12\sin x\cos x + 3\cos^2 x - 2\sqrt[3]{66}$$
хотя бы в одной точке принимает положительное значение.

591. ($\pi - 90.4$) Найти наименьшее значение функции
$$f(x) = 1 + 4\sin x - 2x$$
на отрезке $[0; \pi]$.

592. ($\psi - 78.4$) Найти наибольшее значение функции
$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 4\pi x + 41} + \cos x.$$

593. ($\psi - 78.4$) Найти наименьшее значение функции
$$f(x) = 4x + 9\pi^2/x + \sin x$$
при $x > 0$.

594. ($\chi - 91.1$) Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x) = \frac{3x + 1}{(3x + 1)^2 + 1}$$

595. ($\varepsilon - 97.6$) Найти все a, при которых периметр фигуры, заданной неравенством
$$\log_{\frac{2-|ay|}{3}} \frac{a^2 + x^2}{2a^2} > 0,$$
принимает наименьшее значение.

596. ($\psi - 80.5$) Доказать неравенство
$$2(2x - 1)^4 + 1 + (1 - 2(2x - 1)^4)\sin 2y \geqslant 0$$
и найти все пары (x, y), обращающие его в равенство.

597*. (λ – 98.7) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \cos x + 4\cos\tfrac{x}{2} + 7\cos\tfrac{x}{4} + 6\cos\tfrac{x}{8}.$$

598*. (π – 97.6) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\left(-3\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\cos x - 1\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1-\cos 2y}{2} + \sqrt{11-\sqrt{3}}\cos y + 1\right).$$

20.2 Условные экстремумы

599. (α – 92.6) Найти все a, при которых сумма квадратов корней квадратного трехчлена

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8$$

принимает наименьшее значение.

600. (μ – 89.4) Найти все a, при которых выражение

$$(x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1),$$

где $x_{1,2}$ — корни квадратного трехчлена

$$f(x) = x^2 + ax + a + 1/5,$$

принимает наименьшее значение.

601*. (χ – 97.6) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + 2y^2$ при условии $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

602*. (ε – 98.6) Среди точек с целочисленными координатами (x, y), удовлетворяющими неравенству

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^{\log_{\frac{2x}{3y}}(|x|+|y|-14)} < 3,$$

найти наименее удаленные от точки $(2; -2)$.

603*. ($\varkappa - 93.5$) Найти все пары $(a; b)$, при которых точка с координатами, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} a^2x - y = 2a^2 - 2b \\ x - by = 2 - 2a^2 \\ y = 2 - x, \end{cases}$$

наименее удалена от точки $(3; -1)$.

20.3 Исследование области значений в процессе решения

604. ($\mu - 95.3$) Найти все a, при которых функция

$$y(x) = a(2\sin x + \cos^2 x + 1)$$

не принимает значений, бóльших 3.

605. ($\gamma - 95.6$) Найти все a, при которых функция

$$y(x) = \log_{25-a^2}(\cos x + \sqrt{8}\sin x - a)$$

определена для всех x.

606. ($\varepsilon - 88.6$) Найти все a, при которых неравенство

$$|3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a| \leqslant 3$$

выполняется для всех x.

607*. ($\pi - 98.6$) Найти все a, при которых уравнение

$$5\cos x + \sin x + \cos(x - b) = a$$

имеет решение:

1) хотя бы при одном b;
2) при любом b.

608*. ($\lambda - 89.6$) Найти все a, при которых уравнение

$$(a^2 + 8a + 16)(2 - 2\cos x - \sin^2 x) + \\ +(32 + 2a^2 + 16a)(\cos x - 1) + 3a + 10 = 0$$

не имеет корней.

609. ($\mu - 96.4$) Найти все a, при которых уравнение

$$2\cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3}\sin(2^{2x-x^2+1})$$

имеет хотя бы один корень.

610. ($\lambda - 95.8$) Найти все a, при которых неравенство
$$9^x < 20 \cdot 3^x + a$$
не имеет ни одного целочисленного решения.

611*. ($\varepsilon - 95.5$) Найти все $x \in [-3; 1]$, при которых неравенство
$$x\ (\pi(x+1) - 4\,\mathrm{arctg}(3a^2 + 12a + 11)) > 0$$
выполняется для любых целых a.

612. ($\pi - 88.5$) Найти все a, при которых система
$$\begin{cases} x^2 + 2ax + 4a^2 - 5a + 3 \leqslant 4\sin y - 3\cos y \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi \end{cases}$$
имеет единственное решение.

20.4 Экстремальные ситуации в уравнениях и неравенствах

613. ($\lambda - 83.4$) Решить систему
$$\begin{cases} 3\sin 3x + \cos y = -4 \\ x + y = 3\pi/2. \end{cases}$$

614. ($\varkappa - 92.2$) Решить уравнение
$$\sqrt{1 + \cos 6x}\,\sin\frac{3x}{2} = 2\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{3}.$$

615. ($\alpha - 94.6$) Найти все a, при которых уравнение
$$a^2x^2 + 2a(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{x - 2} = 2\sqrt{2} - 3$$
имеет хотя бы один корень.

616. ($\lambda - 90.5$) Найти все пары (a, b), при которых уравнение
$$(3x^2 - 2a^2 + ab)^2 + (3a^2 - ab + 2b^2 - 12x)^2 + 4 = 4x - x^2$$
имеет хотя бы один корень.

617. ($\varkappa - 81.4$) При каждом a решить уравнение
$$(1 + (a+2)^2)\log_3(2x - x^2) + (1 + (3a-1)^2)\times$$
$$\times\log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

618. ($\zeta - 96.8$) При каждом a решить уравнение
$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}.$$

619. (φ – 98.5) Решить неравенство
$$\sqrt[4]{13+3^{(3^{1-\cos x})}} \leqslant \sqrt{5e^{-2x^2-1}}.$$

620. (χ – 93.5) Решить уравнение
$$2\left(1+\sin^2(x-1)\right) = 2^{2x-x^2}.$$

621. (μ – 93.4) Найти все $a \in (-\pi/2; 0)$, при которых уравнение
$$\sqrt{2\cos(x+a)-1} = \sin 6x - 1$$
имеет хотя бы один корень.

622. (λ – 98.8) Найти все a, при которых уравнение
$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$
имеет хотя бы один корень.

623. (γ – 94.4) Решить уравнение
$$\log_{1/2}(\operatorname{tg}\pi x + \operatorname{ctg}\pi x) = 8(2x^2+3x+1).$$

624. (π – 83.5) Найти все $a \in (2; 5)$, при которых уравнение
$$\log_2(3 - |\sin ax|) = \cos(\pi x - \pi/6)$$
имеет хотя бы один корень на отрезке $[2; 3]$.

625. (χ – 95.5) Решить систему
$$\begin{cases} 2^{-x}y^4 - 2y^2 + 2^x \leqslant 0 \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$$

626. (λ – 95.9) При каждом a решить систему
$$\begin{cases} x \leqslant 1 \\ \dfrac{\log_2(|a|x^2-3x+4)}{\log_2(-3x+4)} = 5^{-|x|(x+1)^2}. \end{cases}$$

627. (ψ – 93.3) Найти все корни уравнения
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right) + \sin 3x = \cos 3x - \sqrt{2}$$
на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$.

628*. (χ – 91.4) Решить уравнение
$$\cos^4 x = \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x\cos 8x.$$

629*. (π – 89.5) Решить неравенство
$$(x - x^2 - 5/4)\log_{\sqrt{3}}(2 + 2\cos^2 x - \cos 2x + 3\cos^2 \pi x) \geqslant -2.$$

630*. ($\varkappa$ – 83.6) Решить уравнение
$$\sqrt{2-|y|}\cdot(5\sin^2 x - 6\sin x\cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) = \\ = \arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5}{4}\pi^2.$$

631*. (ε – 82.6) Решить уравнение
$$8\cos x\cos y\cos(x - y) + 1 = 0.$$

20.5 Исследование величин в текстовых задачах

632. (λ – 95.5) Поезд был на 16 мин задержан в пути на расстоянии 80 км от пункта назначения. Увеличив скорость на 10 км/ч, он прибыл в пункт назначения не позже запланированного срока. Какой могла быть его первоначальная скорость?

633. (γ – 97.4) Танкер наполняется через две трубы, причем через одну первую трубу — на 5 ч дольше, чем через одну вторую. При каком значении времени наполнения танкера через первую трубу его наполнение через обе трубы одновременно занимает более 6 ч?

634. (μ – 81.3) В двух сосудах содержались растворы соли: в первом 5 кг, а во втором — 20. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором — в q раз, где $pq = 9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

635*. (φ – 88.5) За время t первый рабочий сделал на 3 детали больше второго. После этого второй рабочий увеличил производительность труда на 0,2 детали в минуту и через некоторое целое число минут догнал, а затем и обогнал первого на 2 детали. Найти наибольшее возможное значение t при этих условиях.

636. ($\varepsilon - 96.3$) В контейнер упакованы изделия двух типов общим весом 321 кг. Стоимость и вес одного изделия первого типа составляют 40 руб. и 12 кг, а второго типа — 60 руб. и 15 кг. Какова наибольшая и наименьшая возможная стоимость находящихся в контейнере изделий?

637*. ($\varkappa - 95.5$) Требуется построить несколько одинаковых домов общей площадью ровно 2500 м^2. Стоимость одного дома площадью a м^2 складывается из стоимости: материалов — $p_1 a^{3/2}$ тыс. руб., строительных работ — $p_2 a$ тыс. руб. и отделочных работ — $p_3 a^{1/2}$ тыс. руб., где числа p_1, p_2, p_3 образуют геометрическую прогрессию, их сумма равна 21, а произведение — 64. Если бы было построено 63 дома, то затраты на материалы были бы меньше, чем на строительные и отделочные работы. Сколько следует построить домов, чтобы общие затраты были минимальными?

638. ($\varepsilon - 94.5$) Предприятие производит телевизоры: при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|$ руб., а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $540 - \frac{3}{10}n$ руб. При каком n может быть получена наибольшая ежемесячная прибыль в данных условиях?

639. ($\alpha - 95.3$) Вкладчик в начале первого квартала положил на счет в банке некоторую сумму. В конце квартала на нее было начислено $x\%$, после чего он снял половину исходной суммы. На оставшуюся часть счета в конце второго квартала было начислено $y\%$, где $x + y = 150$. При каком значении x счет вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?

640. ($\varepsilon - 97.4$) Банк планирует вложить на 1 год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект A, а остальные

60% — в проект B. Проект A может принести прибыль в размере от 19% до 24%, а B — от 29% до 34%. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Определить наибольший и наименьший уровень этой ставки, при которых чистая прибыль банка будет заключена в пределах от 10% до 15% от имеющихся у него средств.

21 Геометрические вопросы

21.1 Сравнение площадей и объемов

641. (χ – 96.4) На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки D и E соответственно так, что $AD = 2\,DC$, а площади треугольников ABD и AED равны 3 и 1 соответственно. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O. Найти отношение площадей треугольников ABO и DEO.

642. (χ – 95.4) На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC взяты точки D и E соответственно так, что $CD = CE = 1$. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O, а площадь треугольника ADO на 1/2 больше площади треугольника BEO. Найти AB, если $BD = \sqrt{10}$.

643. (λ – 97.4) На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 5$ и $BC = 4$ взята точка D, M — точка пересечения медиан треугольника ABD, а N — точка пересечения медиан треугольника BCD. Найти площадь треугольника BMN.

644. (λ – 78.4) На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки D и E соответственно так, что $AD : BD = 1 : 2$ и $CE : BE = 2 : 1$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BCO равна 1.

645. (φ–81.3) Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ со стороной $AB = 6$ пересекает сторону BC и диагональ BD в точках M и N соответственно так, что $MC = 4$. Найти площадь треугольника BMN, если высота параллелограмма, опущенная на основание AD, равна 3.

646*. (μ – 98.4) На продолжении стороны BC параллелограмма $ABCD$ за точку C взята точка E, а отрезок AE пересекает диагональ BD и сторону CD в точках F и G соответственно. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь треугольника AFD, если $AF = FG + 1$ и $EG = 3$.

647. (γ – 98.3) Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями $AD > BC$ равна 48, а площадь треугольника AOB, где O — точка пересечения диагоналей, равна 9. Найти $AD : BC$.

648. (ψ – 87.5) Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC, COD и AOD равны 20, 40 и 60 соответственно. Найти $\angle BAO$, если $AB = 15$, $AO = 8$ и $\angle AOB > 31°$.

649. (ψ – 83.4) Найти стороны вписанного в окружность радиуса 7 четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = BC$, $\angle D = 120°$, а площади треугольников ABD и BCD относятся, как $2 : 1$.

650. (ψ – 88.5) На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки K и L так, что $KB : AB = 1 : 2$ и $LB : CB = 1 : 4$. Через точки K, L и B проведена окружность, а через точку K — прямая, пересекающая окружность в точке M, а отрезок BL — в точке N. Найти площадь треугольника KLM, если $BL = 6$, $BN = 2$, $MN = 3$, а площадь треугольника ABC равна 32.

651. (ζ – 98.8) Через конец L биссектрисы AL треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе

и пересекающая сторону AC в точке E. Найти AE, если $AC = b$ и $AB = c$.

652*. ($\varepsilon - 92.5$) Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а продолжения сторон BC и AD — в точке F. Прямая EF перпендикулярна биссектрисе угла AED. Найти AB, если $AE = 12$, $DE = 8$, а площади четырехугольника $ABCD$ и треугольника BEC равны.

653. ($\mu - 98.5$) Сфера касается боковых ребер и плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны по $2+\sqrt{2}$. Через точки L и N касания с ребрами SB и SD проведена плоскость, пересекающая ребра SA и SC в точках K и M. Найти SK, если площадь проекции четырехугольника $KLMN$ на плоскость основания пирамиды равна $4/3$.

654. ($\zeta - 95.8$) На ребре AS правильной пирамиды $SABC$ объемом V взята точка D так, что $SD : DA = m : n$. Расстояние от центра основания ABC до плоскости BCD равно d. Найти площадь треугольника BCD.

655. ($\varepsilon - 77.5$) На сторонах AB, BC и AC основания ABC пирамиды $SABC$ объемом V взяты точки K, L и M соответственно так, что $AK : KB = BL : LC = CM : MA = 1 : 2$. Через середину ребра SA параллельно основанию пирамиды проведена плоскость, пересекающая отрезки SK, SL и SM в точках P, Q и R. Найти объем призмы, одно из оснований которой совпадает с треугольником PQR, а другое лежит в плоскости ABC.

656. ($\chi - 83.3$) На боковых ребрах AA' и BB' призмы $ABCA'B'C'$ объемом V взяты точки D и E соответственно так, что $AD = DA'$ и $BE : EB' = 1 : 2$. Найти объем части призмы, заключенной между плоскостями ABC и DEC.

21.2 Исследование геометрических величин и параметров

657. (ε – 85.6) Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого не превосходит 4, пересекаются в точке E, а площади треугольников ABE и CDE равны по 1. Найти BC, если $AD = 3$.

658. (ε – 96.5) В треугольнике ABC со стороной $AC = 8$ и биссектрисой BL отношение площадей треугольников ABL и CBL равно $3 : 1$. Найти длину BL, при которой высота BH — наибольшая.

659. (λ – 98.5) Найти угол C того треугольника ABC со стороной $AB = 16$, высотой $CH = 39/10$ и радиусом описанной окружности, равным 10, у которого медиана CM — наименьшая.

660. (ψ – 83.3) При каждом целом n найти все возможные значения $AB : AC$, при которых существуют такие треугольники ABC и $A'B'C'$, что $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle A' = 120^\circ$ и $B'C' : BC = \sqrt{n}$.

661. (β – 84.4) Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит ромб $ABCD$ со стороной a, диагональю $AC = \frac{3}{2}a$ и центром O, причем SO — высота ромба, равная $\frac{3}{2}\,AC$. Через точку A и середину ребра SC проведена плоскость, образующая с плоскостью основания пирамиды угол в 45°. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью. Сколько таких плоскостей существует?

662*. ($\varkappa$–94.6) В пирамиде $ABCD$ ребра AD и BD взаимно перпендикулярны, а на ребре AB взята такая точка M, что квадрат суммы расстояний от вершин A, B и C до прямой DM равен $2(AD^2 + BD^2 + CD^2)$. Найти CM, если $CD = 20$ и $\angle DAB = \operatorname{arctg}\sqrt{7/3}$.

663*. ($\mu - 94.5$) Найти наибольшее значение объема пирамиды $SABC$, если $SA \leqslant 4$, $SB \geqslant 7$, $SC \geqslant 9$, $AB = 5$, $BC \leqslant 6$ и $AC \leqslant 8$.

664*. ($\varkappa - 78.5$) Основанием пирамиды $SABCD$ объемом $1/6$ служит четырехугольник $ABCD$, который диагональю BD делится на два равновеликих треугольника, $AB = 1$, $BC = CD$ и $AS + DS = \sqrt{2}$. Найти радиус наибольшего шара, помещающегося в этой пирамиде.

665. ($\zeta - 85.5$) Сфера с центром S проходит через вершины основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Отношение площади полной поверхности пирамиды к площади сферы равно a. Найти $\angle ASB$ и все a, при которых вызможна данная конфигурация.

666*. ($\zeta - 90.6$) В правильной пирамиде $SABC$ AD — высота основания ABC. Конус с вершиной A и образующей AD касается своей боковой поверхностью основания пирамиды и боковых граней ASB и ASC. Считая $AD : SD = a$, найти:

1) отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания пирамиды;

2) границы изменения этого отношения при изменении a;

3) все a, при которых конус не имеет точек вне пирамиды.

21.3 Геометрические преобразования

667. ($\zeta - 94.6$) Найти диаметр окружности, у которой хорды AB и CD пересекаются под прямым углом, $AD = a$ и $BC = b$.

668. ($\mu - 96.3$) Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треуголь-

ника CDE всемеро меньше площади четырехугольника $ABDE$. Найти DE и радиус окружности, если $AB = 4$ и $\angle C = 45°$.

669. ($\zeta - 90.2$) Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ, равная d, образует с основанием угол α.

670. ($\zeta - 96.4$) Найти площадь трапеции $ABCD$, если расстояние от середины ее боковой стороны AB до прямой CD равно a и $CD = b$.

671. ($\mu - 97.4$) Найти площадь вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$, если его диагонали пересекаются в точке E, $BD = 6$, $\angle ADB = \pi/8$ и $AD \cdot CE = DC \cdot AE$.

672. ($\mu - 98.3$) Диагонали BE и CE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно. Найти площадь пятиугольника $ABCDE$, если $\angle A = 35°$, $\angle D = 145°$, а площадь треугольника BCE равна 11.

673*. ($\varepsilon - 84.5$) Найти сторону CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ площадью $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$, если $BC = 4$, $\angle A = \pi/2$ и $\angle D = \pi/3$.

674. ($\zeta - 94.8$) Основаниями призмы $ABCDA'B'C'D'$ служат трапеции $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Сумма площадей двух параллельных боковых граней призмы равна S, а расстояние между ними равно d. Найти объем многогранника $BDA'B'C'D'$.

675. ($\lambda - 80.5$) Найти площадь фигуры, заданной системой

$$\begin{cases} \big||x-y| - |y-1|\big| = x - 2y + 1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Метод обозначений (в широком смысле)

22 Замена переменных

22.1 Избавление от радикалов с помощью обозначений

676. (λ – 83.1) Решить уравнение
$$(x+1)\sqrt{16x+17} = (x+1)(8x-23).$$

677. ($\varkappa$ – 94.2) Решить неравенство $\sqrt{x-3} \leqslant 3 - |x-6|$.

678. ($\varkappa$ – 89.2) Решить уравнение
$$8\sqrt{12+16x-16x^2} + 4x = 33 + 4x^2.$$

679. (ζ – 97.3) Решить неравенство
$$\sqrt{\log_4(x-5)} > \log_{1/4}\frac{64}{x-5}.$$

680. (β – 93.3) Решить неравенство $5\sqrt{1-\frac{1}{x}} > \frac{7x-1}{x}$.

681*. ($\varkappa$ – 83.5) При каждом a решить уравнение
$$(x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2).$$

682*. ($\varkappa$ – 90.4) Решить неравенство
$$\sqrt{9x^2-48x-21} + \sqrt{9x^2-51x-15} \leqslant |3x-6|.$$

22.2 Выявление устойчивых выражений

683. (ψ – 89.2) Решить уравнение $\left|\cos^2\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right| = 3\cos x + 1$.

684. (ε – 87.4) Решить неравенство
$$\frac{1}{2}\log_{x-1}(x^2-8x+16) + \log_{4-x}(5x-x^2-4) > 3.$$

685. (χ – 93.4) Решить систему
$$\begin{cases} 6x^2+17xy+7y^2=16 \\ \log_{(2x+y)}(3x+7y)=3. \end{cases}$$

686. (π – 96.3) Решить уравнение $x^{2\log_4 x} = \dfrac{8}{x^2}$.

687*. (ψ – 93.1) Решить уравнение
$$3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}.$$

688. (α – 95.6) Найти все a, при которых неравенство
$$x^2 + 4x + 6a|x+2| + 9a^2 \leqslant 0$$
имеет не более одного решения.

689. (ε – 91.4) Найти наименьшее значение функции
$$f(x) = (x-2)\Big((4 + (x-1)(x-4)\Big)(x-3).$$

690. (ε – 96.1) Решить систему
$$\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y+3} = 1 \\ \left(-x\sqrt{-x}\right)^2 - y = 10. \end{cases}$$

691. ($\varkappa$ – 95.2) Решить систему
$$\begin{cases} x + 3xy + y = 3 + 10\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 11. \end{cases}$$

692. (ζ – 95.7) Найти наименьшее значение выражения xy при условии
$$\begin{cases} x + y = 3a - 1 \\ x^2 + y^2 = 4a^2 - 2a + 2. \end{cases}$$

693*. ($\varkappa$ – 94.5) Числа $a_1, \ldots, a_5$ удовлетворяют равенствам
$$\log_2 a_n \cdot \log_2(a_{n-1}a_{n+1}) = \\ = \log_2 a_{n-1} \cdot \log_2 a_{n+1} \cdot \log_2(4a_n^2), \quad n = 2,\, 3,\, 4.$$
Найти $\log_2(a_2 + 2a_3 - a_4^4)$, если $a_1 = 2$, $a_5 = 2^{1/25}$.

694. (χ – 96.5) Решить уравнение
$$|1 + \cos(\pi\sqrt{x})| + |x^2 - 15x + 44| = 15x - x^2 - \cos(\pi\sqrt{x}) - 45.$$

695. (ψ – 81.4) Решить уравнение
$$\frac{4}{3}\log_3^2(5x-6)^3 - \log_3(5x-6)^3 \cdot \log_3 x^6 = -6\log_3^2 \frac{1}{x}.$$

22.3 Тригонометрические замены и подстановки

696. (χ – 94.3) Решить уравнение
$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}.$$

697. ($\mu - 98.1$) Решить уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{\sin 2x+(\sqrt{3}+1)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+3}=0.$$

698. ($\lambda - 78.1$) Решить уравнение $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{8}{3}\operatorname{ctg} x$.

699. ($\lambda - 81.6$) Решить уравнение $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$.

700*. ($\beta - 85.5$) Сколько различных корней на отрезке [0;1] имеет уравнение

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1\,?$$

22.4 Учет делимости посредством подстановки

701. ($\psi - 79.5$) Найти все целочисленные решения уравнения

$$3(x-3)^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2=33.$$

702. ($\gamma - 98.6$) Найти все целочисленные решения уравнения

$$3x=5y^2+4y-1$$

и доказать, что для любого такого решения число x^3+y^3 — нечетно.

703. ($\psi - 94.5$) Абитуриенты сдавали экзамены в два потока в нескольких аудиториях. В каждом потоке число абитуриентов, экзаменовавшихся в каждой аудитории, было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их пришлось бы провести в три потока, причем в каждом потоке в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу аудиторий. Какое наименьшее число абитуриентов могло бы быть проэкзаменовано при этих условиях?

704*. ($\beta - 97.4$) В двух коробках лежали карандаши: в первой — красные, во второй — синие, причем красных было меньше, чем синих. Сначала 40% карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причем половину из переложенных карандашей составляли синие. В итоге красных карандашей в первой коробке оказалось на 46 больше, чем во второй. Найти общее количество синих карандашей.

23 Переменные, функции, параметры

23.1 Обозначения и переобозначения в текстовых задачах

705. ($\varphi - 85.2$) Числа a_1, a_2, a_3, a_4 образуют арифметическую прогрессию, а числа a_1, a_2, a_4, $a_4 + 12$ — геометрическую. Найти a_2.

706. ($\varepsilon - 79.3$) В начале года 5/6 некоторой суммы денег положили в первый банк (под процент), а оставшуюся часть — во второй (под другой процент). Через год в результате начисления процентов сумма этих вкладов стала равной 670 руб., а еще через год — 749 руб. Если бы первоначально 5/6 исходной суммы положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый, то через год сумма вкладов стала бы равной 710 руб. Какова была бы величина вклада через два года, если бы первоначально всю исходную сумму положили во второй банк?

707. ($\beta - 77.3$) Две бригады приступили к работе в 8 ч. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. К 15 ч первая бригада за время раздельной работы сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада стала делать в час на одну деталь больше, а вторая —

на одну деталь меньше. Приступив к работе в 8 ч и сделав 72 детали, они снова стали работать раздельно, но теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая, уже к 13 ч. Сколько деталей в час делала каждая бригада?

708. (λ – 98.4) Одна бригада выполняет работу на 2 ч быстрее другой, но на 7 ч дольше, чем обе вместе. Выполнят ли они вместе эту работу быстрее, чем за 7 ч 57 мин?

709. (ψ – 86.4) Имеются три килограммовых слитка, содержащих золото. Количества золота в первом, втором и третьем слитках образуют геометрическую прогрессию. Если сплавить 500 г первого слитка и 200 г второго, то в получившимся слитке будет содержаться столько же золота, сколько его содержится в 300 г третьего слитка. В скольких граммах второго слитка содержится столько же золота?

710*. (χ – 92.4) Имеются три сплава. Первый сплав содержит 60% алюминия и 40% хрома, второй — 10% хрома и 90% титана, третий — 20% алюминия, 50% хрома и 30% титана. Из них нужно приготовить новый сплав, содержащий 45% титана. Какие значения может принимать процентное содержание хрома в этом сплаве?

23.2 Введение дополнительных переменных

711. (λ – 94.1) Что больше: $2\sqrt{17}$ или $8,(24)$?

712. (ψ – 94.1) Верно ли неравенство

$$3\log_2 5 < \sqrt{9\log_2 5 + 28}\,?$$

713*. (γ – 87.4) Найти все решения системы

$$\begin{cases} \sin(2x+y) = 0 \\ \cos(x+y) = 1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $-2\pi \leqslant y \leqslant -\pi$.

714*. (γ – 95.5) Решить уравнение $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{19-x} = 3$.

715*. ($\mu - 94.6$) При каждом a решить уравнение

$$2x^2 + 2ax - a^2 = \sqrt{4x + 2a + 3a^2}.$$

716. ($\beta - 93.4$) Первые члены двух данных геометрических прогрессий равны по 1, сумма вторых членов этих прогрессий равна 3, а сумма пятых — 161. Найти сумму шестых членов данных прогрессий.

717. ($\varepsilon - 85.4$) Найти наименьшее значение выражения

$$\frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2}.$$

718. ($\varphi - 89.5$) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x + y + z = x^2 + 4y^2 \\ x + 2y + 3z = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

719*. ($\gamma - 85.5$) Найти все $a \in (-1; 1)$, при каждом из которых выражение

$$1 - 2\sqrt{4x^2 + 4axy + y^2 + 8y + 18}$$

принимает наибольшее значение лишь для одной пары (x, y).

23.3 Рассмотрение функций и использование их свойств

720. ($\mu - 93.2$) Найти все a, при которых уравнение

$$4^x + (a^2 + 5)2^x + 9 - a^2 = 0$$

не имеет корней.

721. ($\psi - 97.4$) Найти все a, при которых уравнение

$$4^x + 2^{x+2} + 7 = a - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет хотя бы один корень.

722*. ($\varkappa - 97.5$) Найти все a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^3 - 24x^2 + 118x + 7} = 5\sqrt{7x - x^2} + \sqrt{a^2 - 11a + 18}$$

имеет единственный корень.

723*. (χ – 89.5) Решить уравнение

$$(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+7}\right)+x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=0.$$

724*. (ψ – 91.5) При каждом $a \geqslant \dfrac{1}{2\pi}$ решить уравнение

$$\cos\frac{2x+a}{2x^2+2ax+5a^2/2}=\cos\frac{2x-a}{2x^2-2ax+5a^2/2}.$$

23.4 Изменение роли букв, входящих в условие

725*. (ε – 83.6) При каждом $a \geqslant 0$ решить неравенство

$$a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\geqslant 0.$$

726*. (π – 84.5) Найти все a, при которых уравнение

$$\sqrt{5a+\sqrt{5a-x-x^2/4}}+x+x^2/4=0$$

имеет хотя бы один корень.

727. (β – 94.5) Найти все x, при которых неравенство

$$(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$$

выполняется для всех $a\in(1;3)$.

728. (φ – 80.5) Найти все $a \leqslant -4$, при каждом из которых меньший из корней уравнения

$$x^2+ax-3x-2a=2$$

принимает наименьшее значение.

729*. (π – 93.5) Найти все a, при которых неравенство

$$x+\frac{7a^2+a-2}{x+a+1}<7a-1$$

не имеет положительных решений.

730*. (π – 92.5) Найти все a, при которых неравенство

$$2ax+2\sqrt{2x+3}-2x+3a-5<0$$

выполняется для всех $x\in[-1;3]$.

731*. (μ – 98.4) Найти все a, при которых хотя бы одна общая точка графиков функций

$$y=-2/3-\arcsin x \text{ и } y=-2/3-2\operatorname{arctg} ax$$

имеет положительную ординату.

732*. ($\mu - 89.6$) Найти наименьшее x, при котором существуют y, z, удовлетворяющие уравнению
$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

733. ($\chi - 98.4$) Решить уравнение
$$\sin x(\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 x = 2.$$

24 Переменные в геометрии

24.1 Введение обозначений для длин и углов

734. ($\beta - 85.4$) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка D, а на луче AB — точка E так, что $\angle DCE = \pi/2$. Найти площадь треугольника BCD, если $\angle ACE = \varphi$, а площади треугольников ABC и CDE равны a и b.

735. ($\mu - 96.3$) Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $2\sqrt{3}$. Найти среднюю линию этого треугольника, параллельную AC, и расстояние между точками, в которых ее продолжение пересекает окружность, если $AB = 4$ и $\angle A = 60°$.

736. ($\beta - 92.3$) Окружность радиуса 6 касается катета AC и гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC с периметром 54, а ее центр лежит на катете BC. Найти площадь треугольника ABC, если $AC > 10$.

737*. ($\psi - 86.5$) В трапецию $ABCD$ с основанием $AD = 20$ и углом $\angle B = \varphi$ вписана окружность. Найти ее радиус, если периметр треугольника BCE, где E — точка пересечения лучей AB и CD, равен 60.

738*. ($\pi - 92.4$) Две окружности с центрами M и N, лежащими на стороне AB треугольника ABC, и радиусами 2 и 5 соответственно, касаются друг друга внешним образом. Первая из них проходит через точку A и пересекает сторону

AC в точке K, а вторая — проходит через точку B и пересекает сторону BC в точке L. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $AK = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{3}}BL$, а отношение площади треугольника ALN к площади треугольника BKM равно $15\frac{\sqrt{3}}{8}$.

739. (β – 88.4) Окружность радиуса $\sqrt{3}$ касается стороны AC и продолжений сторон AB и BC треугольника ABC площадью $2\sqrt{3}-3$. Найти $\angle ACB$, если $\angle BAC = 60°$.

740*. (ζ – 79.5) В ромб $ABCD$ вписана окружность, касательная к которой пересекает стороны AB и AD в точках M и N соответственно. Найти MB и ND, если $MN = a$, $AB = b$ и $\angle A = \varphi$.

741*. ($\varkappa$ – 81.6) Площадь грани ASB пирамиды $SABC$ равна $3\sqrt{7}/4$. Перпендикуляры ко всем граням пирамиды, восстановленные из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке. Найти объем пирамиды, если $\angle BCS = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{231}}{37}$, $AS = SB$ и $SC \cdot AC = 20$.

24.2 Метод координат

742. (ε – 78.2) Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M так, что $AM = \sqrt{2}$, $BM = 4\sqrt{2}$ и $DM = 2$. Найти $\cos\angle BAM$ и площадь прямоугольника, если $AB = 3\,BC$.

743. (χ – 92.3) На стороне AC треугольника ABC взяты точки M и N на расстоянии 2 и 6 от вершины A. Найти радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся прямой AB, если $\angle ABC = 30°$.

744. (λ – 80.5) Хорды AA', BB' и CC' сферы радиуса 11 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M, находящейся на расстоянии $\sqrt{59}$ от центра окружности. Найти AA', если $BB' = 18$ и $CM : MC' = (8+\sqrt{2}) : (8-\sqrt{2})$.

745. (μ – 97.6) Две сферы касаются друг друга внешним образом в точке, лежащей внутри единичного куба $ABCDA'B'C'D'$. Одна из сфер, радиуса 1/3, касается плоскости ABC в точке B, а другая касается плоскости $A'B'C'$ в точке E', лежащей на отрезке $C'D'$. Найти расстояние от точки касания сфер до точки C, если $C'E' : D'E' = 1 : 2$.

24.3 Задачи с возможным участием векторов

746. (ε – 79.2) На боковой стороне $AB = 8$ равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 12$ взята точка E так, что $AE : BE = 1 : 3$. Найти угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CE}$.

747. ($\varkappa$ – 93.4) На стороне BC равнобедренного треугольника ABC с основанием AC взята точка D так, что $BD : CD = 2 : 1$. Точка E — середина стороны AB, а точка F — середина отрезка DE. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $CF = DE = \sqrt{23}/2$.

748. (μ – 88.4) Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен $\arccos(\sqrt{35}/10)$. Точки E и F — середины отрезков AB и CD, а прямая EF перпендикулярна прямым AB и CD. Найти $\angle ACB$, если $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$ и $EF = \sqrt{13}$.

749. (γ – 83.5) На ребрах AB, BC и CD правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром 1 взяты точки K, L и M соответственно так, что $AK = 1/2$ и $BL = CM = 1/3$. Плоскость KLM пересекает прямую AD в точке N. Найти угол между прямыми NK и NL.

750*. (ζ – 80.6) Два одинаковых прямых круговых конуса с углом α между высотой и образующей имеют общую вершину и расположены по одну сторону от плоскости, касаясь ее своей боковой поверхностью. Угол между высотами

конусов равен β, причем $\alpha + \beta < \pi/2$. Найти угол между образующей одного конуса и плоскостью основания другого.

25 Простейшие графические иллюстрации

25.1 Числовая прямая

751. (α – 93.6) Найти все a, при которых неравенство
$$x^2 + 2|x - a| \geqslant a^2$$
выполняется для всех x.

752*. (ε – 84.6) Найти все a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства
$$\sqrt{a^3 + a^2 - a - 1} \cdot x^3 - \sqrt{a^3 + a^2} \cdot x^2 + \sqrt{a^4 - a^2} \cdot x - a^2 \leqslant 0$$
удовлетворяет условию $a \leqslant x \leqslant 2a + 1$.

753. (γ – 93.5) При каких a уравнение
$$x^4 + (a - 5)x^2 + (a + 2)^2 = 0$$
имеет четыре различных корня, образуюших арифметическую прогрессию?

754. (γ – 78.5) Найти все a, при которых система
$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0 \\ x^2 - 2(a - 1)x + a(a - 2) = 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

755. (ψ – 98.6) Найти все целочисленные a и b, при которых уравнение
$$\arcsin \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} - a \cdot 2^{\sin \pi a x} - \left| \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + a \cdot 2^{\sin \pi a x} \right| = 2ab$$
имеет не менее 10 различных корней.

756. (χ – 82.5) Найти все a, при которых уравнение
$$\left((x - a - 1)^2 - 2\right)(x - a - 1)^2 = a^2 - 1$$
имеет положительных корней больше, чем отрицательных.

757. (ε – 85.5) Два пешехода вышли из пункта A в одном направлении с интервалом не более, чем в 40 мин, и прибыли в пункт B с интервалом не менее, чем в 1 ч. Если бы они вышли одновременно, то прибыли бы в пункт B с интервалом не более, чем в 20 мин. Сколько времени был в пути каждый пешеход, если скорость одного из них в полтора раза больше скорости другого?

758*. (ε – 80.5) Пункты A, B, C и D расположены последовательно на прямой дороге так, что $AB : AC : AD = 1 : 2 : 4$. По этой дороге через равные промежутки времени в одном направлении с одинаковой скоростью едут автобусы. Из пункта A в разное время с одной и той же скоростью отправились три пешехода: первый — в B, второй — в C, третий — в D. Первого пешехода обогнали 3 автобуса, второго — 4, причем в моменты выхода из A их не обгоняли очередные автобусы. Сколько автобусов обогнали третьего пешехода с учетом того, что в момент выхода из A и в момент прихода в D его обогнали очередные автобусы?

25.2 Исследование графиков

759. (ψ – 85.4) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = |x^2 + x| + |x^2 + 5x + 6|$$

на отрезке $[2,5; -0,5]$.

760. (χ – 93.5) Сколько корней имеет уравнение

$$2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2\,?$$

761. (μ–79.4) Решить неравенство $\dfrac{6}{2x+1} > \dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}$.

762*. ($\varkappa$–91.5)Доказать, что наименьшее значение функции
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+0,003)^{0,45}} + \frac{3}{(1-x)^{0,48}}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{(x+0,003)^{0,45}} - \frac{3}{(1-x)^{0,48}}\right|$$
на интервале (0;1) не превосходит 3,17.

763. (ε–97.5) Функция $f(x)$, определенная на всей числовой прямой, — нечетная, периодическая с периодом 4 и задается на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 2$ формулой $f(x) = 1 - |x-1|$. Решить уравнение
$$2f(x)f(x-8) + 5f(x+12) + 2 = 0.$$

764*. (χ – 84.5) Найти все a, при которых неравенство
$$-\frac{1}{2}|a+2| \cdot |x+a+4| + \left(|a+2| - \frac{a^2+4a+3}{|a+2|}\right)|x+2| - \\ -\frac{1}{2}|a+2| \cdot |x-a| \geqslant -2$$
имеет ровно два различных решения.

765*. (π – 98.6) Найти все a, при которых система
$$\begin{cases} \sqrt{-y^2-2x} = ax \\ y \geqslant \frac{5}{2} + a \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

766*. (φ – 82.5) Найти все a, при которых неравенство
$$a^3|y| \leqslant \sqrt{2}(a^2 - x^2)$$
имеет наименьшее количество целочисленных решений.

25.3 Упрощение выкладок с помощью свойств параболы

767. (π – 79.2) Решить неравенство
$$\frac{1}{\log_3(x^2-7x+12)} < \frac{1}{\log_3 20}.$$

768. ($\varepsilon - 78.1$) Решить систему

$$\begin{cases} |x^2 + x - 1| = 2x - 1 \\ x < \sqrt{3}/3. \end{cases}$$

769. ($\lambda - 80.3$) Решить уравнение $x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0$.

770. ($\beta - 97.3$) Решить неравенство $\sqrt{|1 - 8x| - 2} \leqslant x + 1$.

771. ($\beta - 82.4$) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x + \sqrt{(x^2 + 6x + 9)(x^2 + 2x + 1)}$$

на отрезке $[-4; -5/4]$.

25.4 Числовая окружность

772. ($\psi - 81.3$) Найти все корни уравнения

$$\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$$

на интервале $(2\pi/5; 6\pi/7)$.

773. ($\gamma - 95.3$) Решить уравнение

$$\frac{(\cos 2x + \sin x - 2)\operatorname{tg} x}{\sqrt{187\pi^2 + 36\pi x - 36x^2}} = 0.$$

774. ($\varepsilon - 82.4$) Решить уравнение $\sin\left(\frac{4}{3}\pi \sin x\right) = \frac{1}{2}$.

775*. ($\varkappa - 95.4$) Решить неравенство

$$\log_{\cos x} \cos^2 x \geqslant \log_{\cos x - 1/2} \left(\cos^2 x - \cos x - x^2 - 51/4\right).$$

776. ($\zeta - 96.8$) Для каждого a найти количество корней уравнения

$$a \operatorname{tg} x + \cos 2x = 1$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

777. ($\mu - 94.6$) Найти все $a \in [-\pi/2; \pi/2]$, при которых уравнение

$$\sin 2x + \sin x + \sin(x - a) = \sin a + \sin(x + a)$$

имеет ровно пять различных корней на отрезке $[-7\pi/4; 5\pi/4]$.

778*. (γ – 97.3) Найти сумму корней уравнения

$$|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x,$$

принадлежащих отрезку $[-8\pi; 7\pi]$.

779*. (μ – 96.4) Найти все a, при которых сумма корней уравнения

$$\cos x - \sin 2x + \sin 4x = a(\operatorname{ctg} x + 2\cos 3x),$$

принадлежащих отрезку $[3\pi/4, 22\pi/3]$, минимальна.

26 Зависимость графиков от параметра

26.1 Сечение графиков прямыми

780. (φ – 77.4) При каждом a определить число корней уравнения

$$\sqrt{2|x| - x^2} = a.$$

781. (γ – 92.5) Найти все a, при которых уравнение

$$|x^2 - 1| + |x^2 - x - 2| = x^2 + 3x + a$$

имеет ровно три различных корня.

782*. (μ – 96.6) Найти все a, при каждом из которых хотя бы для одного b уравнение

$$|x^2 - 1| + ax = |x^2 - 8x + 15| + b$$

1) имеет более пяти корней;

2) имеет ровно пять различных корней.

783. (χ – 92.5) Найти все a, при которых уравнение

$$5|x - 3a| + |x - a^2| + 4x = a$$

1) имеет бесконечно много корней;

2) не имеет корней.

784. (π – 95.5) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} 4x = a + 3 - y^2 + 2y \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

26.2 Взаимное расположение графиков

785. ($\varepsilon - 77.5$) Найти все a, при которых неравенство
$$3 - |x - a| > x^2$$
имеет хотя бы одно отрицательное решение.

786. ($\beta - 78.5$) Найти все a, при которых уравнение
$$x|x + 2a| + 1 - a = 0$$
имеет единственный корень.

787*. ($\varkappa - 97.5$) Найти все x, для каждого из которых неравенство
$$\sqrt{x^2 + 2x + a} > ax^2 + (1 - a)(2x - 1) - 2$$
выполняется при всех $a \in [-2; 0]$

788. ($\alpha - 91.6$) Найти все a, при которых система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - |x| = a \end{cases}$$
имеет ровно два различных решения.

789. ($\gamma - 94.5$) Найти все a, при которых уравнение
$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$
имеет единственный корень.

790*. ($\psi - 97.6$) Найти все пары (a, b), при которых система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y \\ x^2 + (12 - 2a)x + y^2 = 2ay + 12a - 2a^2 - 27 \end{cases}$$
имеет два различных решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2), удовлетворяющих равенству $\dfrac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \dfrac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$.

26.3 Использование параметра в качестве одной из координат

791. ($\zeta - 97.7$) Найти все a, при которых неравенство
$$\frac{x - 2a - 4}{x + 3a - 2} \leqslant 0$$
выполняется для всех $x \in [1; 3]$.

792. (χ – 87.5) Найти все a, при которых ни одно решение неравенства

$$(a - x^2)(a + x - 2) < 0$$

не удовлетворяет условию $x^2 \leqslant 1$.

793. (λ – 78.5) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a < 0 \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

794. (λ – 93.6) Найти все a, при которых ровно одна точка графика функции

$$f(x) = 2x + \lg a \cdot \sqrt{\cos(2a\pi x) + 2\cos(a\pi x) - 3} + 1$$

лежит в области $(2x - 7)^2 + 4(y - 3)^2 \leqslant 25$.

795. (ε – 92.6) Найти все a, при которых неравенство

$$x^2 - 3x + 3|x + a| + a \leqslant 0$$

имеет наибольшее количество целочисленных решений.

26.4 Задачи на расположение парабол

796. (ψ – 77.5) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y + 3)^2 < 4 \\ y = 2ax^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

797. (γ – 90.5) Найти все a, при которых уравнение

$$(a + 1)x^2 + (|a + 2| - |a + 10|)x + a = 5$$

имеет два различных положительных корня.

798. (ψ – 93.5) Пусть $x_{1,2}$ — корни квадратного трехчлена

$$f(x) = (a - 1)x^2 - (2a + 1)x + 2 + 5a.$$

Найти:

1) все a, при которых $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$;

2) все b, при которых выражение $(x_1 - b)(x_2 - b)$ принимает постоянное значение для всех a, для которых оно определено.

799. ($\mu - 92.6$) Найти все x, при которых неравенство
$$(a+2)x^3 - (1+2a)x^2 - 6x + (a^2+4a-5) > 0$$
выполняется хотя бы для одного $a \in [-2; 1]$.

800. ($\varepsilon - 95.6$) Найти все a, при которых уравнение
$$x - 2 = \sqrt{2 - 2(a+2)x}$$
имеет единственный корень.

801*. ($\chi - 81.5$) Найти все a, при которых неравенство
$$\left(a^3 + (1-\sqrt{2})a^2 - (3+\sqrt{2})a + 3\sqrt{2}\right) x^2 + \\ +2(a^2-2)x + a > -\sqrt{2}$$
выполняется для любого $x > 0$.

802. ($\mu - 91.5$) Найти все пары (p, q), при которых неравенство
$$|x^2 + px + q| > 2$$
не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

803. ($\varepsilon - 78.5$) Найти все a, при которых неравенство
$$a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$$
выполняется для любого x.

804. ($\varepsilon - 80.5$) При каждом целочисленном a решить уравнение
$$5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \tfrac{x}{2} = 3a.$$

805*. ($\varepsilon - 91.6$) Найти все a, при которых уравнение
$$\sin^2 x + (a-2)^2 \sin x + a(a-2)(a-3) = 0$$
имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три различных корня.

806*. ($\mu - 98.6$) Сколько интервалов на прямой $y = 2 - x$ образует ортогональная проекция на эту прямую фигуры, заданной системой
$$\begin{cases} (y^2-x^2)^2 + 6(y^2-x^2) - (y+x)^2 + 5y + 7x + 1 < 0 \\ y > 1 - x \end{cases}$$

807*. ($\lambda - 77.5$) Найти все a, при которых система
$$\begin{cases} x^2 + 4ax + 3a^2 > 1 + 2a \\ x^2 + 2ax \leqslant 3a^2 - 8a + 4 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

808*. ($\beta - 77.5$) Найти все a, при которых каждое из уравнений

$$x^2 + \frac{3x}{a} + 2a = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + \frac{12x}{a} - a = 0$$

имеет по два различных корня, а между корнями хотя бы одного из них нет корней другого.

27 Привлечение геометрии

27.1 Геометрический смысл модуля

809. ($\psi - 95.1$) Решить уравнение $|2x - 15| = 22 - |2x + 7|$.

810. ($\varepsilon - 97.1$) Решить систему

$$\begin{cases} \left|\sin \frac{\pi(x+y)}{4}\right| + \left|1 - \sin \frac{\pi(x-y)}{4}\right| = 0 \\ \sqrt{4 - |x| - |y+2|} = \sqrt{4 - |x| - |y+2|}. \end{cases}$$

811. ($\gamma - 94.6$) Найти все a, при которых уравнение

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = a$$

имеет хотя бы один корень, причем все его корни принадлежат отрезку $[2; 17]$.

812*. ($\gamma - 97.6$) Найти все a, при которых фигура, заданная уравнением

$$|x - 2a| + |x + 2a| + |y - 2a| + \\ + |y + 2a| + |z - a| + |z + a| = a^2 + 9,$$

содержит шар радиуса $\pi/2$.

27.2 Эффект от геометрической интерпретации

813. ($\sigma - 89.5$) Найти все пары (a, b), при которых система

$$\begin{cases} 8x + (a^2 + ab + b^2)y = 4 \\ (a - b)x + 26y = 2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

814. ($\gamma - 86.5$) При каждом $a \in (0;1)$ найти наименьшее значение выражения

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) - a(x-y)$$

при условии $\sin(\pi xy) = 0$.

815. ($\varkappa - 96.5$) Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2-14x-10y+58=0 \\ \sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100}+ \\ \qquad +\sqrt{x^2+y^2+4x-20y+104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

816. ($\beta - 89.5$) Найти наибольшее значение выражения

$$2x+y-z$$

при $x^2+3y^2+x^2=2$.

817*. ($\varepsilon - 85.5$) Найти все решения (x,y,z,t) системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z^2+t^2=9 \\ xt+yz \geqslant 6, \end{cases}$$

для которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.

27.3 Применение геометрии в текстовых задачах

818. ($\psi - 78.3$) Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. Когда велосипедист поравнялся с пешеходом, мотоциклист отставал от них на 6 км. Когда мотоциклист поравнялся с велосипедистом, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров впереди был велосипедист в тот момент, когда мотоциклист поравнялся с пешеходом?

819. ($\varkappa - 92.4$) Из города A в город B вылетел самолет, а через некоторое время в противоположном направлении вылетел вертолет. До их встречи друг с другом самолет находился в полете 6 ч, а вертолет — 3 ч. Самолет прибыл

в B в 13 ч 30 мин, а вертолет в A — в 20 ч 30 мин. Найти время вылета самолета из A.

820*. ($\varepsilon - 83.5$) В магазине продаются карандаши: красные по 17 коп. и синие по 13 коп. На покупку карандашей можно потратить не более 4 руб. 95 коп., причем количество синих карандашей не должно отличаться от количества красных более, чем на пять. Сколько красных и сколько синих карандашей нужно купить, чтобы суммарное их количество было максимальным и при этом красных карандашей было как можно меньше?

28 Дополнительные построения в геометрии

28.1 Стандартные построения

821. ($\chi - 91.5$) Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Из конца B диаметра AB меньшей окружности проведены две прямые, касающиеся большей окружности в точках M и N. Прямая AM пересекает меньшую окружность в точке K. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных и большей дугой большей окружности, если $MK = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ и $\angle AMB = 15°$.

822. ($\mu - 80.3$) Средняя линия трапеции равна 4, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1. Найти основания трапеции, если углы при одном из них равны 40° и 50°.

823. ($\pi - 77.4$) Найти площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC = a$ и диагональю $AC = b$, если $AD = CD = \frac{1}{2} AB$.

824. ($\pi - 96.4$) На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ взяты точки E и F соответственно так, что

$AE : BE = 2 : 1$ и $BF : CF = 3 : 1$. В каком отношении прямая DE делит отрезок AF?

825. ($\gamma - 82.3$) На стороне AB треугольника ABC взята точка N так, что $BN = 3$. Площадь треугольника равна $2\sqrt{3}$, $BC = 1$ и $\angle C = \pi/6$. В каком отношении прямая CN делит медиану BM треугольника?

826. ($\zeta - 98.4$) Две окружности радиусов 2 и 3 касаются внешним образом друг друга в точке A, а общая касательная к ним, проходящая через точку A, пересекает две другие общие касательные в точках B и C. Найти BC.

827*. ($\varepsilon - 98.5$) Две окружности радиусов 4 и 5 касаются друг друга внешним образом. Прямые AB и CD касаются меньшей окружности в точках B и C, а большей — в точках A и D. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AB, CD и AD.

828. ($\mu - 77.5$) Основанием пирамиды $SABC$ с высотой SC служит правильный треугольник ABC со стороной $4\sqrt{2}$. Найти угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая — через точку C и середину ребра AB.

829. ($\zeta - 98.8$) Найти ребро основания ABC правильной призмы $ABCA'B'C'$ с боковым ребром $AA' = 2$, если угол между скрещивающимися прямыми AC' и $A'B$ равен $\alpha < 60°$.

830. ($\varepsilon - 98.4$) Из вершин равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 10$ и $BC = 2$ в одну сторону от плоскости $ABCD$ восставлены к ней перпендикуляры $AA' = 1$, $BB' = CC' = 2$ и $DD' = 4$. На отрезках $A'C'$ и $B'D'$ взяты точки M и N соответственно так, что $A'M : C'M = D'N : B'N = 2 : 1$. Найти MN.

28.2 Сравнение площадей и объемов частей фигуры

831. (α–97.6)На сторонах AB и AD прямоугольника $ABCD$ площадью 36 взяты точки E и F соответственно так, что $AE : BE = 3 : 1$ и $AF : DF = 1 : 2$. Отрезки DE и CF пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника FOD.

832. (β – 87.4) Точка E — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$ площадью 30, а точка F на стороне CD взята так, что $2CD = 3FD$. Отрезки AF и DE пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника AOE, если $AD = 2\,BC$.

833. (μ–95.4) На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята точка M так, что $AM : BM = 2 : 3$. На противоположной стороне взята точка N так, что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найти $CN : DN$, если $BC : AD = 1 : 2$.

834. (χ – 86.4) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки D и E соответственно так, что $AE = BD = 2$. Прямые BE и CD пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника BOC, если $AB = BC = 5$ и $AC = 6$.

835*. (β – 82.5) На стороне BC треугольника ABC взяты точки D и E так, что $BD : DE : EC = \frac{2}{3} : 1 : 1$. На продолжении стороны AB за точку B взята точка F так, что $AB : BF = 1 : 2$. Прямые AE и AD пересекают отрезок CF в точках G и H соответственно. Найти отношение площадей четырехугольника $DEGH$ и треугольника ABC.

836. (χ – 80.4) Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC площадью 1, касается стороны AB в точке K. Перпендикуляр KH, опущенный на основание AC треугольника ABC, отсекает от него четырехугольник $KBCH$ площадью s. Найти $\angle A$.

837. (ζ – 86.5) На ребре SB пирамиды $SABC$ взята точка D так, что $SD : BD = 3 : 5$. Найти отношение, в котором плоскость, проходящая через точки A и D параллельно медиане BM треугольника ABC, делит объем пирамиды.

838. (φ – 77.5) На ребрах SA и SB пирамиды $SABC$ взяты точки D и E соответственно так, что $SD : AD = SE : BE = 1 : 2$. Найти отношение, в котором плоскость, проходящая через точки D и E параллельно ребру SC, делит объем пирамиды.

839*. ($\varkappa$ – 87.6) На ребрах AD, DC, BC и AB пирамиды $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно так, что отрезки KM и LN пересекаются в точке O, причем $4OM = 3OK$, $25ON = 24OL$ и $DK \cdot AN - AK \cdot BN = AK \cdot AN$. Найти отношение, в котором плоскость KLM делит объем пирамиды.

840. (μ – 78.5) Через середины ребер AD и BC пирамиды $ABCD$ объемом 5 проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M так, что $DM : CM = 2 : 3$. Найти площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины равно 1.

841. (ζ – 91.6) Основанием пирамиды $SABCD$ служит трапеция $ABCD$ с основаниями $BC : AD = 1 : 2$. Плоскость, проходящая через вершину S параллельно BC, пересекает отрезок AB в точке M так, что $AM : BM = 2 : 1$. Площадь сечения пирамиды этой плоскостью равна s, а расстояние от нее до прямой BC равно d. Найти:

1) отношение, в котором указанная плоскость делит объем пирамиды;

2) объем пирамиды.

28.3 Разные задачи, использующие дополнительные построения

842. ($\varkappa$ – 88.3) Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиуса 10, а диаметр этой окружности, параллельный гипотенузе, содержит вершину C. Найти площадь треугольника ABC, если $\angle A = 75°$.

843. (ζ – 83.5) Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает катеты AC и BC в точках D и E соответственно, а на гипотенузе взята точка F. Найти площадь треугольника ABC, если $DE = 2$, $BE = BF = 1$ и $\angle BCF = \alpha$.

844. (μ – 95.5) На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки D, E и F соответственно. Отрезки DE и BF проходят через центр вписанной в треугольник окружности, а прямые DE и AC — параллельны. Найти CF и периметр треугольника ABC, если $AC = 15$, $AD = 4$ и $CE = 6$.

845. (β – 79.3) В трапецию вписана окружность радиуса r, а хорда, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами, параллельна основаниям трапеции и равна a. Найти площадь трапеции.

846*. (χ – 98.5) Диаметр AB пересекает хорду CD в ее середине E. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке F, а отрезки AF и CE — в точке G. Найти площадь треугольника CFG, если $AB = 10$ и $AE = 1$.

847*. (λ – 77.4) Радиус AO окружности с центром O пересекает в точке D сторону BC вписанного в окружность треугольника ABC с высотой $AH = \sqrt{2\sqrt{3}}$, а продолжение биссектрисы AL этого треугольника пересекает окружность в точке E. Найти отношение площадей треуголь-

ника OAE и четырехугольника $ODLE$, если $AE = 4\sqrt{2}$ и $\angle ADH = \pi/3$.

848*. ($\varkappa$ – 97.5) В треугольнике ABC взята точка O так, что радиусы описанных около треугольников AOB и AOC окружностей равны 4 и 5 соответственно, а расстояние между их центрами равно 6. Найти OC, если $AB = 6$ и $AC = 7$.

849*. ($\zeta - 82.5$) На боковом ребре SA правильной треугольной пирамиды $SABC$ взята точка D, через которую проведено сечение пирамиды, пересекающее апофемы граней SAC и SAB в точках M и N. Прямые DM и DN образуют углы β с плоскостью основания ABC. Найти $\angle MDN$, если $\angle DMS = \angle DNS = \alpha$.

850*. ($\varkappa$–80.6) Для каждой вершины пирамиды $SABC$ сумма выходящих из нее ребер одинакова. Угол между ребрами SB и AC равен $\arccos\frac{1}{3}$, радиус вписанной в пирамиду сферы равен $\sqrt{3/13}$ и $SA^2 + SC^2 = 12$. Найти объем пирамиды, если он не превосходит $5/3$.

Метод следствий

29 Простейшие типы следствий

29.1 Следствие, заложенное в постановке задачи

851. ($\mu - 96.2$) Найти
$$\log^2_{\frac{x}{y}} x + \log^2_{\frac{y}{x}} y,$$
если $\log_{\frac{x}{y}}(x^9) = \log_{\sqrt{y}} \dfrac{y}{x}$.

852. ($\varphi - 78.2$) Решить уравнение
$$\sqrt{x - \sqrt{3} + a^2x^2 + 2ax(\sqrt{6} - \sqrt{3})} = 6\sqrt{2} - 9,$$
если известно, что оно имеет хотя бы один корень.

853. ($\varkappa - 96.1$) Числа a, b, c, d образуют геометрическую прогрессию. Найти $b^3 + c^3$, если $a + d = 10$ и $ad = 7$.

854. ($\mu - 93.2$) Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии впятеро больше первого члена, а сумма первых пятнадцати членов равна 100. Найти сумму первого, шестого и одиннадцатого членов этой прогрессии.

855. ($\mu - 97.2$) Сумма первых членов данных арифметической и геометрической прогрессий равна -3, сумма третих — 1, а сумма пятых — 5. Найти разность арифметической прогрессии.

856*. ($\lambda - 94.9$) В течение трех лет четыре бригады разрабатывали месторождение горючих сланцев, работая с постоянной производительностью каждая. Отношения времени работы первой, второй, третьей и четвертой бригады и суммарные количества выработанной ими продукции по годам соответственно равны: в первый год — $4:1:2:5$ и 10 млн. т, во второй год — $2:3:2:1$ и 7 млн. т, в третий год — $5:2:1:4$ и 14 млн. т. Сколько млн. т сланцев выработали бы эти бригады за 4 месяца, работая вместе?

857. (π – 97.3) Из порта A в порт B, расстояние между которыми равно 108 км, в 9 ч по озеру отправляется катер. Одновременно из порта B навстречу ему отправляются яхта и теплоход. Катер встречается с теплоходом в 12 ч, а с яхтой — в 13. На сколько километров отстанет яхта от теплохода в 14 ч?

858*. (γ – 77.4) Грузовик и легковой автомобиль выехали одновременно из пункта A в пункт C. Грузовик доехал до пункта C по прямому пути, равному 360 км. Легковой автомобиль поехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта B, расположенного в 120 км от A, двигаясь со скоростью, вдвое большей скорости грузовика, а затем увеличил свою скорость на 40 км/ч и проехал путь от B до C, равный 1000 км, прибыв в пункт C на 1 ч 15 мин позднее грузовика. Если бы легковой автомобиль проехал с последней скоростью весь свой путь, то прибыл бы в пункт C на 1 ч позднее грузовика. Найти скорость грузовика.

859. (γ – 96.2) Функция $f(x)$ — периодическая с периодом $\sqrt{2}$. Найти $f(\sqrt{8})$, если $3f^2(0) + 7f(\sqrt{72}) + 4 = 0$ и $f^2(-\sqrt{2}) + 3f(\sqrt{8}) + 20/9 = 0$.

860*. (ψ – 78.5) Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет неравенствам $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$ и $f(3) < -4$. Определить знак коэффициента a.

29.2 Метод проверки

861. (β – 82.2) Решить уравнение $1 + 2\sin x\,|\cos x| = 0$.

862. (λ – 84.3) Найти $\sin\alpha$, если $\sin 2\alpha \geqslant 3/5$ и $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 1/3$.

863. (λ – 96.5) Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - xy = 20y \\ 5xy - 5y^2 = 4x. \end{cases}$$

864. (π – 79.5) Решить систему
$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0 \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$$

865*. (β – 98.5) Решить систему
$$\begin{cases} \cos 10x - 2\sin 5x \geqslant 3\cdot 4^y - 3\cdot 2^{y+2} + 27/2 \\ \sqrt{(2-\sqrt{3})^{4y}+(2+\sqrt{3})^{4y}+2+} \\ \qquad + 14\log_2 \cos 10x + 6\cos 5x \geqslant (2y+1)^{3/2}. \end{cases}$$

866. (χ – 94.5) При каждом a решить систему
$$\begin{cases} x^2+ax+3=0 \\ \sin^2 a\pi + \cos^2\dfrac{\pi x}{2} + 2^{y^2} = \sin\dfrac{\pi x}{2}. \end{cases}$$

29.3 Метод подбора

867. (μ – 97.1) Решить уравнение
$$\sqrt{25-24\cos x} = 4\cos x - 3.$$

868. (π – 90.6) Решить неравенство $\log_2(2-3x) > 4x+1$.

869. (α – 94.5) Решить неравенство
$$\left|x - 4^{1+\sqrt{3-x}}\right| \leqslant \frac{5}{3}x - 4\cdot 4^{\sqrt{3-x}}.$$

870*. (χ – 98.6) Найти все a, при которых уравнение
$$\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x +$$
$$+\left(\sqrt{x^2-3ax+8}-\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x = 2(\sqrt{2})^x$$
имеет единственное решение.

871*. (ψ – 82.6) Решить уравнение
$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2+2x-2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2+2x-3).$$

872*. (χ – 98.6) Решить уравнение
$$\log_2(4x+1)\cdot\log_5(4x+4)+\log_3(4x+2)\times$$
$$\times\log_4(4x+3) = 2\log_3(4x+2)\cdot\log_5(4x+4).$$

873. (χ – 94.5) Решить систему
$$\begin{cases} x^2+2x\sin y+1=0 \\ 8y\,|x|(x^2+y^2)+\pi^3+4\pi=0. \end{cases}$$

874. ($\mu - 77.4$) Решить систему
$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 + 0. \end{cases}$$

875. ($\varepsilon - 95.4$) В первый год разработки месторождения на нем было добыто 100 т руды. В течение нескольких следующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25% ежегодно, после чего на протяжении 3 лет она поддерживалась на достигнутом уровне. Сколько лет разрабатывалось месторождение, если общий объем добычи руды на нем составил 850 т?

876. ($\varepsilon - 77.2$) Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. В тот момент, когда он проехал четверть пути, из пункта B в пункт A выехал мотоциклист, который доехал до A и сразу же повернул обратно, увеличив скорость. Мотоциклист прибыл в B одновременно с велосипедистом, потратив на обратный путь столько же времени, сколько на путь из пункта B до первой встречи с велосипедистом. Во сколько раз скорость мотоциклиста на обратном пути оказалась больше скорости велосипедиста?

30 Получение и применение оценок

30.1 Выводы на области допустимых значений

877. ($\alpha - 94.4$) Решить неравенство
$$2\sin x - 1 \leqslant \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}.$$

878. ($\chi - 83.2$) Решить неравенство
$$\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1\right)\log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x}\left(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1\right) \leqslant 0.$$

879. ($\varepsilon - 95.3$) Решить неравенство
$$\log_{\frac{3x-1}{3x+1}}\left(x - \frac{1}{3}\right) \geqslant 1.$$

880. ($\gamma - 82.4$) Решить систему

$$\begin{cases} \log_{7-x}(4-y) < 0 \\ \log_{y-1}(3-x) < 0. \end{cases}$$

881. ($\varkappa - 98.2$) Решить неравенство

$$\left|\sqrt{x-4} - 3\right| > \left|\sqrt{9-x} - 2\right| + 1.$$

882*. ($\mu - 98.3$) Решить неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{1}{2}x + 1\right) \cdot \log_3(-2x - x^2) \geqslant$$

$$\geqslant \log_3\left(\frac{1}{2}|x| + \frac{3}{2}\right) \cdot \log_2(-2x - x^2).$$

883. ($\varepsilon - 95.2$) Решить уравнение

$$2|\sin x| + \log_{\operatorname{tg} x}\left(-\frac{|\cos x|}{\sin x}\right) = 0.$$

884*. ($\varkappa - 96.4$) Решить неравенство

$$\arccos 3x + \arcsin(x+1) \leqslant 7\pi/6.$$

30.2 Разные задачи, использующие оценки

885. ($\varepsilon - 98.3$) Решить неравенство

$$\sqrt{x + 2(1 - \sqrt{1+x})} < \frac{2x+3}{4\sqrt{1+x} - 5}.$$

886. ($\lambda - 98.6$) Решить неравенство

$$\left|\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| - 3x + \frac{3\sqrt{2}}{2} < \frac{3x^2}{2} - \left|\frac{x^2}{2} + x - \sqrt{2}\right|.$$

887. ($\gamma - 83.4$) Решить систему

$$\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3| - \log_2 3} = 3^{-y-4} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leqslant 8. \end{cases}$$

888. ($\varepsilon - 93.4$) Найти периметр фигуры, заданной системой

$$\begin{cases} 2|x+2| \arcsin((y-1)^2) \leqslant \pi(x+2) \\ 2|y-1| - x \geqslant 0. \end{cases}$$

889. ($\gamma - 81.5$) Решить систему

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

890*. (β – 93.6) Решить систему
$$\begin{cases} y+2=(3-x)^3 \\ (2z-y)(y+2)=9+4y \\ x^2+z^2=4x \\ z\geqslant 0. \end{cases}$$

891. (ψ – 88.6) Найти наибольшее a, при котором неравенство
$$\sqrt{a^5}(8x-x^2-16)+\frac{\sqrt{a}}{8x-x^2-16}\geqslant -\frac{2}{3}a|\cos\pi x|$$
имеет хотя бы одно решение.

892. (ψ – 84.7) Решить систему
$$\begin{cases} 3^{2x+y-1}+4\cdot 3^{2x-1}\leqslant 2 \\ 4x+y\geqslant 2-\log_3 4. \end{cases}$$

893*. (χ – 96.5) Решить систему
$$\begin{cases} \sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+5x+5}\geqslant 2 \\ x^2+6x+5\leqslant 0. \end{cases}$$

894*. (μ – 78.4) Найти все a, при которых система
$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2\geqslant \dfrac{1-a}{a+1} \\ 3x^2+10xy-5y^2\leqslant -2 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

895. (π – 94.4) Найти все пары (a,b), при которых система
$$\begin{cases} a+\sin bx\leqslant 1 \\ x^2+ax+1\leqslant 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

896*. (μ – 95.6) Найти все $a\in[0;2\pi]$, при которых система
$$\begin{cases} x^2+y^2+2z(x+y+z)-\sin a=0 \\ (x+1)\sin^2\frac{a}{2}+y^2\sqrt{x}+a^2\sqrt{z}+\sin\frac{3a}{2}=0 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

897. (φ – 85.5) Для каждого a решить уравнение
$$3\cos x\sin a-\sin x\cos a-4\cos a=3\sqrt{3}.$$

898. (ε – 90.5) Найти все корни уравнения
$$\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(2\pi x)}\cos(\pi x)+\sin(\pi x)=\sqrt{2}$$
на отрезке $[-3;1]$.

30.3 Оценки в текстовых задачах

899. ($\pi - 88.4$) Два вида корма для животных отличаются содержанием белков, жиров и углеводов: в первом корме белков в 8 раз больше, чем жиров, и в 3 раза больше, чем углеводов; во втором корме белков и углеводов в 2,5 раза больше, чем жиров. Можно ли за счет смешивания этих кормов приготовить корм, в котором углеводов в 3 раза больше, чем жиров?

900. ($\lambda - 87.5$) В 7 ч от причала A отплыли две лодки, каждая со своей скоростью. Сначала они проплыли 8 км по озеру, а затем 5 км по течению реки до причала B. Первая лодка прибыла в B не позднее 9 ч 50 мин, а вторая — не ранее 10 ч 40 мин. Какова собственная скорость каждой лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а скорость второй лодки составляет 3/4 от скорости первой?

901*. ($\varepsilon - 85.4$) В 6 ч из пункта A в пункт B по течению реки отправились лодка и катер. Лодка прибыла в B в 16 ч, а катер, дойдя до B, сразу же повернул назад и, встретив лодку не позднее 14 ч, прибыл в A не ранее 22 ч. Найти время прибытия катера в B, если его собственная скорость вдвое больше собственной скорости лодки.

902*. ($\mu - 86.4$) Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. В 9 ч из села в город выехал мотоциклист, а из города в село — велосипедист. Мотоциклист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге, в 3/2 раза, а велосипедист — в 5/3 раза. Мотоциклист приехал в город в 14 ч 20 мин, велосипедист в село — в 16 ч, причем встретились они в 12 ч. Успел ли бы мотоциклист приехать в город до 14 ч 40 мин, если бы весь путь ехал с первоначальной скоростью?

31 Элементы логики

31.1 Приведение к противоречию

903. ($\gamma - 96.3$) Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{3\pi+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{3\pi-1}{2}x\right)=1.$$

904*. ($\psi - 96.5$) Пусть $t_{1,2}$ — корни квадратного трехчлена

$$f(t)=t^2-(5a-2)^2t-3a^2-7a+1.$$

Найти все a, при которых для любого b функция

$$g(x)=\cos(b\pi x)\cos\Big((t_1^3+t_2^3)\pi x\Big)$$

является периодической.

905*. ($\chi - 95.5$) Найти все целочисленные решения уравнения

$$x^2+1953^{100}xy-1995^{100}y^2=0.$$

906. ($\varphi - 86.5$) В ящике находятся 13 черных шаров и 17 белых. Разрешается:

а) увеличить на 2 число черных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых;

б) увеличить на 1 число черных шаров и одновременно увеличить на 2 число белых;

в) уменьшить на 2 число черных шаров и одновременно увеличить на 1 число белых;

г) уменьшить на 1 число черных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых.

Можно ли, совершая в каком-либо порядке и количестве описанные действия, добиться, чтобы в ящике оказалось 37 черных шаров и 43 белых?

907*. ($\lambda - 83.5$) Катер проходит по реке, скорость течения которой равна 5 км/ч, путь AD, состоящий из участков $AB = 11$ км и $BC = CD = 2$ км. По расписанию, выходя из пункта A в 12 ч, он прибывает в пункт B в 12 ч 20 мин, в пункт C — в 12 ч 40 мин, а в пункт D — в 13 ч. Если

бы катер двигался без остановок с постоянной собственной скоростью, то сумма модулей его отклонений от расписания в моменты прибытия в пункты B, C и D не превышала бы уменьшенного на полчаса времени, необходимого катеру для прохождения 5 км с этой скоростью в стоячей воде. Какой из пунктов находится выше по течению: A или D?

908. (μ – 92.2) Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке E, $\angle ABE = 60°$ и $\angle CBE = 70°$. Точка M на прямой AC взята так, что $\angle DME = 80°$. Где лежит точка M: на диагонали AC или на ее продолжении?

909. (μ – 93.3) В равнобедренной трапеции диагональ равна 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, а другое равняться 5?

31.2 Переход от общего к частному

910. (ψ – 78.4) Найти все пары (a, b), при которых равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$$

выполняется для всех x.

911. (μ – 93.6) Найти все a, при которых неравенство

$$\log_5(a\cos 2x - (1 + a^2 - \cos^2 x)\sin x + 4 - a) \leqslant 1$$

выполняется для всех x.

912. (λ – 96.8) Найти все a, при которых для любого b уравнение

$$\cos(b + ab + bx) + 2\cos(b^2 x) = 3a^2$$

имеет хотя бы один корень.

913. (λ – 98.8) Найти все a, при которых для любого $b \geqslant 2$ неравенство

$$(b - 1)x + 2\sqrt{1 - (b - 1)^{-2}} < \left(\frac{a + 1}{b - 1} - b + 1\right)\frac{1}{x}$$

выполняется при всех $x < 0$.

914*. ($\mu - 89.6$) Найти все a, при которых для любого b система

$$\begin{cases} 2(1+|y|)^a + (b^2-2b+2)^x = 3 \\ xy(x+b-1) = 2a^2-3a+1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

31.3 Следствия, связанные с количеством решений

915. ($\mu - 90.4$) Найти все a, при которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin\cos x + a^2 = 0$$

имеет единственный корень.

916. ($\varkappa - 98.5$) Найти все a, при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a\cos\frac{x^2-1}{x} + a^2 = \frac{5}{4}$$

имеет единственный корень.

917. ($\varepsilon - 90.6$) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y + (3+2\sqrt{2})^y - 3a = x^2+6x+5 \\ y^2 - (a^2-5a+6)x^2 = 0 \\ -6 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

918. ($\varphi - 84.5$) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} y \geqslant (x-a)^2 \\ x \geqslant (y-a)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

919*. ($\beta - 91.5$) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} z\cos(x-y) + (2+xy)\sin(x+y) - z = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 2x \\ (x+y+a\sin^2 z)\Big((1-a)\ln(1-xy)+1\Big) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

920*. ($\chi - 86.5$) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{|y+3|} = 1 - \sqrt{5|x|} \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

921. ($\chi - 80.5$) Найти все a, при которых число корней уравнения

$$3(x^2+a^2) = 1 - (9a^2-2)x$$

не превосходит числа корней уравнения

$$x + (3a-2)^2 3^x = (8^a - 4)\log_3(3^a - 1/2) - 3x^3.$$

31.4 Различные логические связи между утверждениями

922*. ($\lambda - 79.6$) Найти все $x \geqslant 0$, при которых из системы

$$\begin{cases} abx \geqslant 4a + 7b + x \\ a, b \geqslant 0 \end{cases}$$

следует неравенство $ab \geqslant 5$.

923. ($\varepsilon - 88.5$) Найти все a, при которых уравнения

$$a(2a-1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$$

и

$$\log_{\frac{1}{2}}(3\operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3\operatorname{tg} x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1$$

равносильны.

924. ($\chi - 88.5$) Найти все a, при которых системы

$$\begin{cases} ax + 3y = 6a - 4 \\ x + y = 2a \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2 - 2y^4 - 6x + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - (2a+4)x + 2(a^2+a+2) = 0 \end{cases}$$

равносильны.

925*. ($\gamma - 87.5$) Найти все натуральные a, при которых выражение $\dfrac{1}{x+y+3}$ имеет смысл для всех пар чисел $x, y < 0$, для которых имеет смысл выражение $\lg(xy - a)$.

926*. ($\sigma - 98.6$) Доказать, что четыре точки пересечения кривых, заданных уравнениями

$$y = x^2 - 2x \quad \text{и} \quad \left(\frac{x}{3}\right)^2 + y^2 = 1,$$

лежат на одной окружности, и найти ее радиус.

32 Задачи с целыми числами

32.1 Оценки целочисленных переменных

927. ($\mu - 96.1$) Найти все целочисленные решения неравенства
$$\sqrt{x^3 - 5x - 3} \leqslant 6 - x.$$

928. (χ–97.6) Найти все целочисленные решения уравнения
$$(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy.$$

929*. ($\mu - 90.5$) Найти все целочисленные решения уравнения
$$\log_2(2x + 3y - 6z + 3) + \log_2(3x - 5y + 2z - 2) + \\ + \log_2(2y + 4z - 5x + 2) > z^2 - 9z + 17.$$

930. (μ–96.5) Какое наибольшее число членов может содержать конечная арифметическая прогрессия с разностью 4 при условии, что квадрат ее первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 100 ?

931. ($\varphi - 77.1$) В двух ящиках содержится в общей сложности более 29 деталей. Число деталей, содержащихся в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем втрое превышает число деталей, содержащихся во втором ящике. Утроенное число деталей, содержащихся в первом ящике, превышает удвоенное число деталей, содержащихся во втором ящике, но менее, чем на 60. Сколько деталей содержится в каждом ящике?

932*. (λ – 84.5) Три мальчика хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, они не смогли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку двух игрушек не хватило бы 34 коп. Когда третьему мальчику добавили вдвое больше денег, чем у него было, после покупки игрушек у них еще оста-

лось 6 коп. Сколько стоили игрушки, если первоначально у второго мальчика было на 9 коп. больше, чем у первого?

933. ($\varkappa$–86.3) Число двухкомнатных квартир в доме вчетверо больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных квартир увеличить впятеро, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если их не меньше 100 ?

32.2 Использование делимости

934*. ($\varepsilon-89.6$) Найти все целочисленные решения уравнения

$$9x^2y^2+9xy^2+6x^2y+x^2+2y^2+18xy+5x+7y+6=0.$$

935*. ($\varkappa-96.5$) Найти все целочисленные решения уравнения

$$14x^4-5y^4-3x^2y^2-125x^2+82y^2+51=0.$$

936*. ($\varkappa-79.4$) Найти все целочисленные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}(3x-\sqrt{9x^2+160x+800})\right)=1.$$

937*. ($\varepsilon-84.4$) Две бригады землекопов одинаковой производительности каждый вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она закончила бы работу на 2 ч раньше. Найти число землекопов в каждой бригаде.

938. (π – 77.5) Рота солдат прибыла на парад прямоугольным строем по 24 человека в ряд, однако не все прибывшие солдаты смогли участвовать в параде. Оставшийся для парада состав перестроили так, что число рядов уменьшилось на 2, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Если бы

все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы построить в виде квадрата. Сколько солдат было в роте?

939. ($\varepsilon - 98.7$) Три фермера привели для продажи на ярмарку баранов: первый — 10, второй — 16, третий — 26. В первый день они установили одинаковую цену, и каждый продал не менее одного барана, но не всех. Во второй день они продали остальных баранов, опять же по одинаковой, но более низкой цене. По какой цене продавались бараны в первый и во второй день, если каждый из фермеров выручил от продажи по 3500 руб.?

940. ($\varepsilon - 93.5$) За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем $11\frac{1}{9}$, $7\frac{1}{7}$ и, наконец, 12% в месяц. Под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определить срок хранения вклада.

941. ($\varphi - 79.5$) Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где m и n — натуральные числа. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

32.3 Экстремальные целочисленные задачи

942. ($\gamma - 79.4$) В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Каково наименьшее число учеников в таком классе?

943. ($\varepsilon - 84.5$) Из строительных деталей двух видов можно собирать дома трех типов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого вида и 100 второго, для сборки 16-квартирного дома — 110 деталей первого типа и

150 второго, а для сборки 21-квартирного дома — 150 деталей первого типа и 200 второго. Всего имеется 900 деталей первого вида и 1300 второго. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

944. ($\varkappa$–87.5) С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 т. Масса маленького блока 0,2 т, большого — 3,6 т, большой блок занимает место 14 маленьких. Найти наименьшее число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

33 Специфика геометрии

33.1 Получение различных следствий

945. (λ – 86.2) Стороны AB, BC, AC треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию. Найти отношение высоты AH треугольника к радиусу вписанной окружности.

946. (ψ – 89.4) В четырехугольнике $ABCD$ расположены две окружности: первая окружность касается сторон AB, BC и AD, а вторая — сторон BC, CD и AD. На сторонах BC и AD взяты точки E и F соответственно так, что отрезок EF касается обеих окружностей, а периметр четырехугольника $ABEF$ на $2p$ больше периметра четырехугольника $ECDF$. Найти AB, если $CD = a$.

947*. (ψ – 96.4) Окружность с центром O касается лучей AB, AC и отрезка BC, который пересекается с отрезком AO в точке D. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AD : OD = 2 : 3$, $BC = 7$ и $\angle A = 60°$.

948. ($\gamma - 96.4$) Сумма квадратов косинусов трех углов треугольника равна 1. Найти площадь треугольника, если радиусы вписанной и описанной окружностей равны $\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$ соответственно.

949*. (π – 98.5) Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Найти $\angle AED$, если $AB = BC = CD$, $AE = DE$ и $\angle CBD \neq \angle ACB$.

950. (λ – 94.8) В данный четырехугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность, диаметр которой совпадает с одной из диагоналей. Доказать, что разности противоположных сторон этого четырехугольника равны.

951*. ($\chi - 79.4$) Из точки K, лежащей внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры $KL = l$, $KM = m$ и $KN = n$ на стороны $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$ соответственно. Найти отношение площади треугольника ABC к площади треугольника KMN.

952*. (ε – 93.6) Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найти площадь треугольника.

953. ($\varkappa$ – 92.5) Две окружности пересекаются в точках A и B. На одной окружности взята точка C, а на другой — D так, что прямая AD касается первой окружности, а прямая AC — второй. Найти площадь треугольника CAD, если $BC = 3$, $BD = 6$ и $\operatorname{tg} \angle CAD = -1/2$.

954. (ζ – 78.6) Одна окружность пересекается с другой в точках A и B, а с ее диаметром CD — в точке E. Луч с вершиной C пересекает дуги AE и AD в точках M и N. Найти MN, если $AN = a$ и $BN = b$.

955. ($\zeta - 97.8$) Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Найти SA, если $SB = 2$, $SC = 3$ и $SD = 4$.

956. ($\mu - 97.5$) Три равные хорды AA', BB' и CC' шара радиуса 7 проходят через точку S так, что $AS = 8$, $A'S = 3$, $BS > B'S$ и $CS > C'S$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

33.2 Угадывание особенностей конфигурации

957. (ε–86.4) В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ и $AD = 3 + 3\sqrt{2}/2$ расположены две окружности: первая окружность с центром E и радиусом 2 касается сторон AB и AD, вторая — с центром F и радиусом 1 касается первой окружности и стороны CD. Найти площадь треугольника CFG, где G — проекция точки B на прямую EF.

958*. ($\varkappa - 94.4$) На высотах AH и BK треугольника ABC взяты точки M и N соответственно так, что $\angle ANC = \angle BMC = 90°$, $\angle MCN = 30°$ и $MN = 4 + 2\sqrt{3}$. Найти биссектрису CL треугольника MCN.

959. ($\gamma - 94.4$) На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены квдраты $ACEF$ и $BCGH$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает отрезок EG в точке N. Найти CN, если $AC = 1$ и $BC = 4$.

960*. ($\gamma - 86.4$) Найти сторону AB выпуклого четырехугольника $ABCD$, если $BC = \sqrt{3}$, $BD = 1$, $\angle CBD = 120°$ и $\angle BAC = \angle CAD = 30°$.

961. ($\chi - 87.4$) Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$. Точка E лежит на ребре AS, а ее проекция F на основание пирамиды — на отрезке AC. Найти разность объемов пирамид $SABCD$

и $EABD$, если $\angle ADS = \angle AEC = 90°$, $AB = a$ и $AF : CF = b$.

962. ($\mu - 95.5$) Основанием пирамиды с высотой 5 служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9. Сфера касается плоскости каждой боковой грани в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Найти радиус сферы.

33.3 Метод подбора в геометрии

963. ($\chi - 97.5$) Середины высот треугольника лежат на одной прямой, а наибольшая его сторона равна 10. Какое наибольшее значение может принимать площадь такого треугольника?

964. ($\chi - 89.4$) Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, которая симметрична точке F относительно прямой AB. Найти BC, если $\angle AEB = 2\angle CFD$, а площадь пятиугольника $AFBCD$ равна $5\sqrt{3}$.

965. ($\zeta - 91.4$) Перпендикуляр, проведенный из вершины A выпуклого четырехугольника $ABCD$ к стороне BC, пересекает диагональ BD в точке E. Найти AB, если $BE = a$, $DE = b$ и $\angle BAC = \angle BDC = 90°$.

966*. ($\gamma - 89.5$) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ACD равно $\sqrt{2}$. Найти BC, если $AD = 2$ и $\angle ABD = \angle ACD = 90°$.

967*. ($\zeta - 81.6$) В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, в котором $CD : BC = a$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E, лежащей на стороне CD. Найти отношение:

1) расстояний от точки E до прямых AD и BC;
2) площадей треугольника ADE и BCE.

968. ($\varkappa$ – 96.6) Две окружности пересекаются в точках A и B. Хорда CD одной окружности пересекается с хордой EF другой окружности в точке G. Найти AG, если $BG = 2$, $AB = 3CG = 9EG$ и $FG = 3DG = 6CG$.

969*. ($\zeta - 84.6$) Две окружности радиусов $r < R$, касающиеся внешним образом друг друга, касаются третьей окружности в точках A и B, а также некоторой прямой в точках C и D. Прямые AB и CD пересекаются в точке E. Найти длину касательной, проведенной из точки E к третьей окружности.

970. (β – 83.4) Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$, имеющей площадь 6, пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и точку пересечения диагоналей трапеции, пересекает основания BC и AD в точках F и G соответственно, а на отрезке EC взята точка H. Найти площадь треугольника EFH, если $EF : EG = EH : CH = 1 : 3$.

971. ($\gamma - 88.4$) Плоскость, параллельная ребрам AD и BC тетраэдра $ABCD$, пересекает ребра AB, AC и BD в точках E, F и G соответственно. Найти отношение $AE : BE$, если $AD : BC = 1 : 3$ и $EF : EG = 3 : 1$.

972*. ($\mu - 87.6$) Сфера касается ребер AD, BD, BC и AC тетраэдра $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Найти KL, если $MN = 7$, $NK = 5$, $LN = 2\sqrt{29}$ и $KL = LM$.

973*. (μ–91.6) Сторона основания ABC правильной призмы $ABCA'B'C'$ равна $\sqrt{3}$. Сфера радиуса $7/2$ касается плоскости ABC и продолжений ребер AB', BC' и CA' за точки A, B и C. Найти боковое ребро призмы.

33.4 Проектирование на прямую

974. ($\varepsilon-87.5$) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно так, что $AM : BM = 2 : 3$ и $AN : CN = 4 : 5$. В каком отношении прямая CM делит отрезок BN ?

975. ($\zeta-97.6$) На сторонах AB и AC угла BAC взяты точки N и L соответственно так, что $NB = LC$ и $BO : LO = m : n$, где O — точка пересечения отрезков CN и BL. Найти $AN : AC$.

976. ($\lambda-96.6$) Катеты прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до высоты, проведенной к гипотенузе.

977. ($\lambda - 95.6$) Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, делит биссектрису одного из острых углов в отношении $(1+\sqrt{2}) : 1$, считая от вершины. Найти острые углы треугольника.

978*. ($\zeta - 97.6$) На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B. На луче OA взята точка M на расстоянии $3OB$ от прямой OB, а на луче OB — точка N на расстоянии $3OA$ от прямой OA. Найти MN, если радиус описанной около треугольника AOB окружности равен 3.

979. ($\varphi - 91.5$) Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ перпендикулярна основанию BC. Окружность, проходящая через точки C и D, касается прямой AB в точке E. Найти расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 4$ и $BC = 3$.

980. ($\chi - 93.4$) В квадрат площадью 18 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит по одной вершине прямоугольника. Найти площадь прямоугольника, если его стороны относятся, как $1 : 2$.

33.5 Проектирование на плоскость

981. (μ – 95.6) Двугранные углы при ребрах AB, BC и AC пирамиды $SABC$ равны 90°, 30° и 90° соответственно. Плоскость пересекает ребра SB, SC, AC и AB в точках K, L, M и N соответственно, причем четырехугольник $KLMN$ – трапеция, основание KL которой втрое меньше основания MN. а высота равна 13. Найти площадь этой трапеции, если $AS = BC = 13$.

982. (λ – 94.10) Найти площадь сечения единичного куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через середину диагонали BD' перпендикулярно ей.

983*. (μ – 96.5) На ребрах AA', AB, $B'C'$ и BC единичного куба $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки K, L, M и N соответственно так, что $AL = 2/3$, $B'M = 1/4$ и $CN = 3/10$. Какое из ребер AB или AD пересекается с плоскостью, параллельной отрезку LM и содержащей отрезок KN? В каком отношении это ребро может делиться плоскостью?

984. (μ – 93.5) На диагонали AC' параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ взята точка M, а на прямой $B'C$ — точка N так, что отрезки MN и BD параллельны. Найти их отношение.

985. (μ – 92.5) На прямой l в пространстве взяты точки A, B и C так, что $AB = 10$ и $BC = 22$. Найти расстояние между прямыми l и m, если расстояния от точек A, B и C до прямой m равны 12, 13 и 20 соответственно.

986*. (ψ – 92.5) На ребрах AB, AC, CD и BD тетраэдра $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно, а точки E и F — середины ребер AD и BC. Прямые KM, LN и EF пересекаются в одной точке, а угол между скрещивающимися прямыми AD и BC равен 45°. Найти пло-

щадь четырехугольника $KLMN$, если $AD = 9$, $BC = 8$ и $AK : KB = 5 : 1$.

987. ($\varkappa - 94.6$) Все высоты тетраэдра $ABCD$ равны между собой. Найти BD, если $AB = 9$, $BC = 13$ и $\angle ADC = 60°$.

988. ($\zeta - 93.8$) Два шара радиуса r касаются друг друга и данной плоскости с одной стороны от нее. Цилиндр радиуса $R > r$ касается боковой поверхностью шаров и плоскости (с той же стороны). Найти радиус шара, большего, чем данные, и касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

33.6 Сечение фигур плоскостями

989. ($\beta - 81.5$) Два скрещивающихся ребра тераэдра равны 12 и 4, а остальные ребра — по 7. Найти расстояние от вписанной в тетраэдр сферы до наибольшего ребра.

990. ($\varepsilon - 84.6$) Основанием пирамиды $SABCD$ с высотой SH служит прямоугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке H. Плоскость пересекает ребра SA, SB, SC и SD в точках K, L, M и N соответственно так, что $SL = 7$, $SN = 7/6$, $SK + SM = 25/6$ и $SK > SM$. Найти SK и SM.

991. ($\psi - 94.4$) Через вершины A, B и D четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведена сфера, пересекающая боковые ребра SA, SB и SD в точках M, N и K так, что $AM : SM = 1 : 3$. Другая сфера, проходящая через точки B, C, D и K, пересекает ребро SB в точке L. Найти $SL : BN$, если $SA : SB = \sqrt{7} : \sqrt{11}$.

992*. ($\mu - 93.5$) Сфера радиуса R делит каждое из ребер AB, BC, CD и AD тетраэдра $ABCD$ на три равные части и проходит через середины ребер AC и BD. Найти высоту тетраэдра, опущенную из вершины H.

993. (μ – 98.5) Четырехугольная пирамида $SABCD$ с высотой SH вписана в сферу, центр которой лежит в плоскости основания $ABCD$. Найти CS и CD, если $CH = 4$, $AS = 15/4$, $AD = 3$, $AB = BS$, а диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке H.

994. (μ – 96.6) Основанием вписанной в сферу четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Найти BD, если $SA = 4$, $SB = 8$, $SD = 7$ и $\angle SAC = \angle SBC = \angle SDC$.

995. ($\varkappa$ – 85.6) На ребрах AB, AC и AD правильного тетраэдра $ABCD$, описанного около сферы радиуса $5\sqrt{6}/2$, взяты точки K, L и M соответственно так, что $KB = 15$, $MD = 10$ и объем пирамиды $AKLM$ равен $375\sqrt{2}$. Найти сумму радиусов двух шаров: вписанного в пирамиду $AKLM$ и описанного около нее.

996*. (μ – 81.5) Тетраэдры $ABCD$ и $BCDE$ расположены по разные стороны от плоскости BCD. Прямая DE параллельна плоскости ABC и удалена от нее на расстояние в a раз большее, чем от центра вписанного в тетраэдр $BCDE$ шара. Найти суммарную площадь сечения этих тетраэдров плоскостью, проходящей через середину ребра AD параллельно плоскости ABC, если площадь грани ABC равна s, а площадь поверхности тетраэдра $BCDE$ с высотой BH равна S, причем $\operatorname{tg} \angle HDE : \operatorname{tg} \angle BDE = b$.

997. (χ – 90.5) Основанием пирамиды $SABCD$ с высотой $SH = 3\sqrt{3}/2$ служит прямоугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке H. На ребрах $AB = 6$ и $AD = 9$ взяты точки M и N так, что $AM = 4$ и $AN = 6$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки M и N параллельно ребру AS.

998. (μ – 94.5) Найти радиус сферы, касающейся ребер AD, DD', CD единичного куба $ABCDA'B'C'D'$ и прямой BC'.

999. (π – 98.5) На ребрах AA' и CC' куба $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки M и N ссоответственно так, что $AM = 2\,A'M$ и $CN = 2\,C'N$. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через точки M, N и B ?

1000. (ζ – 92.8) Три шара радиуса r касаются друг друга и боковой поверхности прямого конуса (снаружи). Найти расстояние от вершины конуса до плоскости, проходящей через центры шаров, если эта плоскость перпендикулярна высоте конуса, а его образующая составляет с высотой угол α.

Приложение А. Дополнительные разделы

А.1 Элементы комбинаторики

1001. (λ – 78.2) Сколькими способами можно разбить на две команды группу из 7 мальчиков и 8 девочек так, чтобы в первой команде было 4 мальчика и 3 девочки?

1002. (φ – 78.2) Автобусные билеты имеют шестизначные номера от 000 001 до 999 999. Билет считается счастливым, если первые три его цифры нечетны и различны, а вторые — четны, причем цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько существует различных номеров счастливых билетов?

1003*. (ζ – 77.3) Найти все отрицательные члены последовательности $a_1, a_2, \ldots,$, удовлетворяющей при любом натуральном n условию

$$a_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n},$$

где через A_m^k и P_m обозначены числа размещений и перестановок соответственно.

А.2 Производная

1004. (γ – 82.2) Найти все x, при которых производная функции

$$f(x) = 5 - 8\cos(3x + \pi/11)$$

равна 12.

1005. (π – 80.2) Найти все x, при которых производная функции

$$f(x) = 4x - \sin 2x + 4\sqrt{2}\cos x$$

равна 0.

1006. (χ – 86.3) Найти все $x \in (\pi/2, \pi)$, при которых производная функции
$$f(x) = \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos x\right)\cos x \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)$$
равна 0.

1007. (β – 83.2) Найти все x, при которых производная функции
$$f(x) = 3x^2 \ln x - 36x \ln x - 7x^3 + 108x$$
равна 0.

А.3 Исследование функций с помощью производной

1008. (β – 80.2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$$
на отрезке $[-5; 4]$.

1009. (π – 77.2) Найти все точки экстремума функции
$$f(x) = xe^{-3x}.$$

1010. (γ – 84.3) Найти наименьшее значение функции
$$f(x) = 6x + e^{-6x}.$$

1011. (γ – 77.3) Найти промежутки монотонности и все точки экстремума функции
$$f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

1012. (λ – 78.3) Найти наименьшее значение функции
$$f(x) = x \ln x - x \ln 5$$
на отрезке $[1; 5]$.

1013. (π – 79.2) Найти наименьшее значение функции
$$f(x) = x + \frac{4}{(x-2)^2}$$
на отрезке $[0; 5]$.

1014. ($\varepsilon - 80.4$) Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = 5\cos x - \cos 5x$$

на отрезке $[-\pi/4; \pi/4]$.

1015*. ($\varkappa - 78.2$) Найти все точки минимума функции

$$f(x) = \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}.$$

1016*. ($\varphi - 83.3$) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 24x - \cos 12x - 3\sin 8x$$

на отрезке $[-\pi/6; \pi/6]$.

1017*. ($\chi - 84.3$) Найти все точки минимума функции

$$f(x) = x^2(18\sin 3x - 45\cos 3x) + \\ + x(12\cos 3x + 30\sin 3x) + 68\sin 3x - 170\cos 3x.$$

1018. ($\mu - 79.3$) Найти все точки минимума и наибольшее значение функции

$$f(x) = x^3 - 2x|x-2|$$

на отрезке $[0; 3]$.

1019*. ($\varepsilon - 79.4$) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = |x^2 + 2x - 3| + \tfrac{3}{2}\ln x$$

на отрезке $[1/2; 4]$.

1020. ($\pi - 82.3$) Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = -|2x^3 + 15x^2 + 36x - 30|$$

на отрезке $[-3; 2]$.

1021. ($\beta - 89.2$) Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{1}{2x^3 - 9x^2 + 12x + 1}$$

на отрезке $[0; 3]$.

1022*. ($\pi - 91.5$) При каждом $a < 0$ найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-a)^3 - \frac{1}{2}(x-a)^2$$

на отрезке $[0; 1]$.

1023*. ($\varepsilon - 78.5$) Найти все a, при которых функция
$$f(x) = \sin 2x - 8(a+1)\sin x + (4a^2 + 8a - 14)x$$
возрастает и не имеет критических точек.

1024*. ($\varkappa - 77.5$) Найти все $a \in [0; \pi/2]$, при которых наименьшее значение функции
$$f(x) = 3x^4 + 4x^3(\cos a - \sin a) - 3x^2 \sin 2a$$
на отрезке $[-\sin a; \sin a]$ минимально.

1025*. ($\mu - 77.3$) Доказать, что наименьшее значение функции
$$f(x) = \cos x \sin 2x$$
на отрезке $[-\pi; \pi]$ больше $-7/9$.

A.4 Касательная

1026. ($\beta - 79.1$) Найти все x, при которых касательные к графикам функций $f(x) = 3\cos 5x$ и $g(x) = 5\cos 3x + 2$ в точке с абсциссой x параллельны.

1027. ($\varphi - 80.3$) Найти абсциссу точки пересечения с осью абсцисс касательной к графику функции $f(x) = 4x - x^2$ в точке с абсциссой 3.

1028. ($\zeta - 79.4$) Найти абсциссы точек пересечения с осью абсцисс тех касательных к графику функции $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$, которые образуют с положительной полуосью абсцисс угол $3\pi/4$, отложенный в положительном направлении.

1029. ($\psi - 77.2$) Найти все x, при которых касательная к графику функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ в точке с абсциссой x отсекает от положительной полуоси абсцисс вдвое меньший отрезок, чем от отрицательной полуоси ординат.

1030. ($\psi - 80.4$) Найти площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой 1.

1031. ($\chi - 90.3$) При каждом $a > 0$ найти площадь и периметр треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $y = a\sin x$ в точке с абсциссой $-4\pi/3$.

1032. ($\varphi - 82.3$) Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и двумя касательными к графику функции $f(x) = 6x + x^2$: в точке минимума и в точке с абсциссой -2.

1033. ($\psi - 82.2$) Найти точку пересечения двух касательных к графику функции $f(x) = \sin 3x$ в точках с абсциссами $\pi/18$ и $5\pi/18$.

1034*. ($\pi - 86.4$) Найти площадь треугольника, образованного осью абсцисс и двумя касательными к графику функции $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 5$, проведенными из точки $(0; 3)$.

1035*. ($\varkappa - 78.3$) Найти уравнения всех касательных к графику функции $f(x) = -x^2/2 + 2$, проходящих через точку $(1/2; 2)$ и пересекающих в двух различных точках график функции $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

1036*. ($\beta - 82.4$) Найти уравнения всех касательных к графику функции $f(x) = \sqrt{1 - 2x^2}$, образующих с осями координат треугольник площади $1/\sqrt{2}$.

A.5 Интеграл

1037. ($\mu - 77.1$) Найти все решения неравенства

$$\int_0^x (2 - 4t + 3t^2)\,dt \leqslant x,$$

удовлетворяющие условию $x > 0$.

1038. ($\mu - 78.2$) Найти все корни уравнения

$$\int_0^x \cos(t + x^2)\,dt = \sin x$$

на отрезке $[2; 3]$.

1039. ($\beta - 78.2$) Найти все a и b, при которых функция

$$f(x) = a\sin(\pi x) + b$$

удовлетворяет условиям $f'(1) = 2$ и $\int\limits_0^2 f(x)\,dx = 4$.

A.6 Нахождение площадей с помощью интеграла

1040. ($\gamma - 80.1$) Найти площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и линией $y = 2(x-1)^2 - 8$.

1041. ($\pi - 81.3$) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$ и $y = 4 - x$.

1042. ($\zeta - 80.4$) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = |x^2 - 4|$, $x = -1$ и отрезком $[-1; 2]$ оси абсцисс.

1043. ($\chi - 77.2$) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 2$, $y = x^2 + 4x + 5$ и $y = 1$.

1044. ($\varphi - 77.2$) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ и $x = \pi/2$.

1045. ($\beta - 77.3$) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 - 4x + 5$ и двумя касательными к нему в точках с абсциссами 1 и 4.

1046*. ($\beta - 81.4$) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = 4x - x^2$ и двумя касательными к нему, проведенными из точки $(5/2; 6)$.

1047*. ($\psi - 79.2$) Найти все $a > 0$, при которых площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$ и $y = ax^2$, равна b. При каких b задача имеет решение?

1048*. ($\varepsilon - 79.4$) При каком $a \geqslant 1$ площадь фигуры, лежащей в полуплоскости $x \geqslant 0$ и ограниченной линиями $y = ax^2$, $y = \frac{1}{2}ax^2$, $y = 1$ и $y = 2$, максимальна?

A.7 Разные задачи на применение производной и интеграла

1049. ($\chi - 88.3$) Среди точек, лежащих на линии $y = 1 - 2x^2$, найти ближайшую к точке $(1; 3/4)$.

1050. ($\varepsilon - 77.3$) Найти наименьшее расстояние от точки $(0; -2)$ до точек, лежащих на линии $y = \dfrac{16}{\sqrt{3}x^3} - 2$ при $x > 0$.

1051*. ($\pi - 87.5$) При каком $x \in [-1; 2]$ точка с абсциссой x, лежащая на линии $y = \sqrt{4 - 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3}$, наименее удалена от начала координат?

1052*. ($\chi - 83.4$) Среди точек, лежащих на линии $y = 1 + \cos x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$, найти ближайшую к прямой $\sqrt{3}x + 2y + 4 = 0$.

1053. ($\chi - 85.3$) При каком $a \in [-3/5; 3/2]$ площадь треугольника, одна вершина которого совпадает с началом координат, а две другие имеют абсциссу a и лежат на линиях $y = 3x^2 - 10x + 2$ и $y = -2x^2 + 5x - 10$ соответственно, максимальна?

1054*. ($\mu - 80.4$) При каком $a \in [1/2; 1]$ площадь треугольника, образованного осью абсцисс, прямой $x = 2$ и касательной к графику функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ в точке с абсциссой a, минимальна?

1055. ($\lambda - 77.3$) При каком $a > 0$ площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4}$ и $y = \dfrac{a^2 - ax}{1 + a^4}$, максимальна?

1056. ($\lambda - 96.8$) Найти все a, при которых неравенство $ax^2 + 1 > 4x - 3a$ выполняется для всех $x \in (-1; 0)$.

1057*. ($\psi - 90.5$) Найти все $a > 0$, при которых любой положительный корень уравнения $2x^3 + x^2 - x - a - 1 = 0$ удовлетворяет неравенству $12x^3 - 7x > 6a + 1$.

1058*. ($\varkappa - 92.6$) Найти все a, при которых неравенство
$$\pi + \frac{6}{5}(x^2 + ax) + \cos(x^2 + ax) + \sin\left(2x^2 + 2ax + \frac{\pi}{3}\right) < 0$$
выполняется для всех $x \in [\pi/2; 3\pi/2]$.

1059*. ($\lambda - 78.5$) Пункт A находится в поле на расстоянии 8 км от прямолинейной дороги, на которой стоит пункт B. Скорость автомобиля по дороге вдвое больше, чем по полю. Если ехать на автомобиле из пункта A по полю до любой точки C, находящейся на дороге, а затем по дороге до B, то на это уйдет времени не меньше, чем если ехать из A в B напрямик по полю. Найти AB.

1060*. ($\varepsilon - 77.4$) Трапеция вписана в окружность радиуса R. Центр окружности лежит внутри трапеции, а одно из оснований равно $R\sqrt{3}$. При какой боковой стороне площадь такой трапеции максимальна?

1061. ($\chi - 78.3$) Найти наибольший объем прямоугольного параллелепипеда, основанием которого служит квадрат, а периметр боковой грани равен 6.

1062. ($\varphi - 86.3$) Найти высоту цилиндра, вписанного в сферу радиуса 6 и имеющего наибольший объем.

1063. ($\gamma - 96.5$) Найти наименьший объем прямого конуса, описанного около сферы радиуса r, и высоту конуса при этом объеме.

1064. ($\varphi - 81.5$) Найти высоту и радиус основания прямого конуса, вписанного в сферу радиуса R и имеющего наибольший объем.

1065. ($\chi - 81.4$) Два шара единичного радиуса касаются друг друга и боковой поверхности прямого конуса, а также его основания — в точках, симметричных относительно центра. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания, при котором объем конуса минимален.

Приложение Б.

Варианты вступительных заданий, предлагавшихся в 1999 г.

Б.1 Механико-математический факультет, *март*

1066. Решить уравнение
$$\sqrt[8]{\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}}+\sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2}-2x\right)}=0.$$

1067. Решить систему
$$\begin{cases} 2^{x+2}=\dfrac{49}{4}x^2+4 \\ 2^{x+2}-4\leqslant 2^x x^2(14-2^{x+2}). \end{cases}$$

1068. Для некоторых $x\neq y$ и z выражения
$$\log_{x^5y^2z}\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{z} \quad \text{и} \quad \log_{x^2y^5z}\frac{\sqrt{xy}}{z}$$
принимают одно и то же значение. Найти это значение.

1069. Диагональ AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой угла C и пересекается с другой диагональю в точке E. Найти $\angle CDB$, если $AB=AD$, $\angle BAD=140^\circ$ и $\angle BEA=110^\circ$.

1070. Найти все a, при которых расстояние между любыми различными корнями уравнения
$$\sin 2x+|2a+1|\sin x+|a|=2|a|\cos x+\sin x+|2a^2+a|$$
не меньше, чем $\pi/2$.

1071. Основание высоты $SH\sqrt{5/11}$ треугольной пирамиды $SABC$ лежит внутри треугольника ABC. Найти радиус описанной около пирамиды сферы, если $SA=1$, $SB=2$, $\angle ASB=120^\circ$ и $\angle ACB=60^\circ$.

1072. Решить уравнение

$$(x^2+4)\lg\cos^2 2x + x^2\lg\sin^2 5x = 4\lg(\sin 5x\cos^3 2x)$$

1073. Сумма членов конечной геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель положителен, равна 21/16. Сумма тех же членов с чередующимися знаками (первый с плюсом, второй с минусом и т. д.) равна 13/16. Найти знаменатель прогрессии.

1074. Найти все x, при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x-4|(|x-5|-|x-4|)-8x \quad \text{и} \quad |x|(|x|-|x-9|)+36$$

неположительно, и при этом его модуль не меньше модуля другого.

1075. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку B, пересекает окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E. Найти AC, если $AB = 12$, $AD = 21$ и $AE = 35$.

1076. Найти все a, при которых множество решений неравенства

$$\frac{2-2a}{3^{x-1}-a+1} \leqslant \frac{3(3^x+4a-8)}{5a-15}$$

содержит какой-либо луч на числовой прямой.

1077. Основанием пирамиды $SABCD$ служит трапеция $ABCD$ с основаниями $AD : BC = 5 : 3$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E, а центр O вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке SE. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если $SO : EO = 8 : 3$, а площадь грани SBC равна 9.

Б.3 Механико-математический факультет, *июль*

1078. Решить неравенство $3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \leqslant 3^{x^2-2} + 27^{2x+3}$.

1079. Решить уравнение

$$|\log_2(2x+7)| = \log_2(1+|x+3|) + \log_2(1-|x+3|).$$

1080. Найти все φ, при которых положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\varphi\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}+\varphi\right) = \sin\frac{x}{2}$$

образуют арифметическую прогрессию.

1081. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка K лежит на основании AD.

1) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK — сторону BC ?

2) Найти отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

1082. Найти все a, при которых сумма длин интервалов, составляющих множество решений неравенства

$$\frac{x^2+(2a^2+6)x-a^2+2a-3}{x^2+(a^2+7a-7)x-a^2+2a-3} < 0,$$

не меньше 1.

1083. Три шара радиусов 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других и двух данных плоскостей. Найти расстояние между точками касания с плоскостями меньшего из этих шаров.

Б.4 Факультет вычислительной математики и кибернетики, *апрель*

1084. Пункты A, B, C и D расположены последовательно на прямой дороге так, что расстояния AB, BC, CD образу-

ют геометрическую прогрессию. Из A в D вышел пешеход, который, дойдя до пункта D, повернул обратно и пришел в пункт B, затратив на весь путь 5 ч. Найти AC, если пешеход двигался со скоростью 5 км/ч и путь от B до C прошел за 3 ч.

1085. Решить неравенство
$$\left(x+\frac{8}{x}\right)\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right| \geqslant 9\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|.$$

1086. Решить уравнение
$$\sqrt{\frac{1+\sin(2x-\pi/3)}{8}} = -\sin x\cos x.$$

1087. На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $\angle CAD = 2\angle BAD$. Окружности радиусов 8 и 4, вписанные в треугольники ACD и ABD соответственно, касаются прямой BC в точках, удаленных друг от друга на расстояние $\sqrt{129}$. Найти AD.

1088. Найти все a, при которых уравнение
$$3^{x^2+2ax+4a-3} - 2 = \left|\frac{a-2}{x+a}\right|$$
имеет ровно два различных корня на отрезке $[-4; 0]$.

1089. Радиус сферы описанной, около прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ объемом V, равен R. Отрезки M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 — общие перпендикуляры к парам прямых $A'C'$ и AB', BC' и AC, DC' и AD' соответственно. Найти сумму объемов тетраэдров $AA'M_1N_1$, ABM_2N_2 и ADM_3N_3, если $AA' + AB + AD = a$.

Б.5 Факультет вычислительной математики и кибернетики, *июль*

1090. Что больше: $\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha - 1}\right)$ или $19\pi/24$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$?

1091. Прямая, заданная на координатной плоскости уравнением $y = 4 - (2 - \sqrt{3})x$, пересекает в точках A и B окружность с центром в начале координат и радиусом 4. Найти сумму длин отрезка AB и меньшей дуги AB.

1092. Решить неравенство
$$\left|\log_{x+1}\sqrt{(x-2)^4}+2\right| \geqslant -3+\log_{\frac{1}{x+1}}\sqrt{(x-2)^6}.$$

1093. Основание высоты SH четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит внутри четырехугольника $ABCD$, а высоты боковых граней, опущенные из вершины S, равны по $\sqrt{2}$. Найти SH, если $AB = 2$, $BC = 6$, $\angle ABC = \pi/3$ и $\angle ADC = 2\pi/3$.

1094. Решить уравнение
$$\operatorname{tg} 14x + 3\operatorname{ctg} 14x + \sin 6x - 2\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}+1}.$$

1095. Найти радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC с высотой $BH = 1$ и периметром $4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$, если $\angle ABC = 75°$.

Б.6 Физический факультет, *март*

1096. Решить уравнение $\sin 14x = \cos 4x - \sin 6x$.

1097. Решить уравнение $2^{2x-5} - 4^{x-2} = 32^{\frac{2x}{5}} - 66$.

1098. Решить неравенство
$$2\log_4(x+1) - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-5) < 3.$$

1099. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно так, что $AM = 2CM$ и $\angle CMN = 60°$. Найти отношение площадей треугольника CMN и четырехугольника $ABNM$, если $AB = BC$ и $\angle A = 45°$.

1100. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3}-|3y-1|=0 \\ 4\sqrt{9y^2-6y+1}+\sqrt{x^2-4x+3}=0. \end{cases}$$

1101. Две окружности пересекаются в точках A и B. Хорда AC первой окружности касается второй окружности, а хорда AD второй окружности касается первой. Найти BC, если $AC=a$, $AD=b$ и $BD=c$.

1102. При каждом a решить уравнение

$$\log_a(x^2-3a)=\log_a(a^2-3x).$$

1103. Высота SH правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит диаметром сферы. Найти длину линии пересечения сферы с поверхностью пирамиды, если $AS=a$, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ.

Б.7 Физический факультет, *май*

1104. Решить уравнение $\sin x-\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=0$.

1105. Решить уравнение $\sqrt{x+2}\sqrt{2x+1}=x+4$.

1106. Решить неравенство $\dfrac{2}{\log_3(x+1)}\leqslant\dfrac{1}{\log_9(x+5)}$.

1107. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно, а отрезки BN и CM пересекаются в точке K. Найти $BK:NK$, если $AN:CN=2:3$ и $CK:MK=5:2$.

1108. Решить систему

$$\begin{cases} 2^{\frac{y}{x}+\frac{3x}{y}}=16 \\ \sqrt{y}-\sqrt{2x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}. \end{cases}$$

1109. Высоты BH и BK ромба $ABCD$ пересекают его диагональ AC в точках M и N (точка M лежит между A и N). Найти HK, если $AM=a$ и $MN=b$.

1110. Найти все a, при которых уравнение
$$\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$
имеет ровно один корень на промежутке $[0; 2\pi)$.

1111. Через вершины B' и D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ с ребрами $AB = BC = 2a$ и $AA' = a$ проведена плоскость, параллельная прямой AC. Найти радиус шара, касающегося этой плоскости и трех граней параллелепипеда с общей вершиной B.

Б.8 Физический факультет, *июль*

1112. Решить уравнение $\cos 7x + \cos 3x + 2\sin^2 x = 1$.

1113. Решить неравенство $\left|2 - \dfrac{1}{x-4}\right| < 3$.

1114. Найти боковую сторону AB описанной около окружности равнобедренной трапеции $ABCD$ площадью $\sqrt{3}$, если $BC : AD = 1 : 3$.

1115. Решить систему
$$\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21 \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$$

1116. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{4}{x-2} + 1} = \dfrac{1}{x-2}$.

1117. Прямые AB и AC касаются окружности с центром O. Найти AO, если $AO < BO = CO = a$, $AB = b$, $AC = c$ и $b \neq c$.

1118. Найти плоский угол при вершине S правильной треугольной пирамиды $SABC$, если ее боковое ребро вдвое больше радиуса сферы, проходящей через точку A и касающейся плоскости SBC в точке B.

1119. 1) При каждом a решить неравенство $\log_{2a} \log_3 x^2 > 1$.

2) При каких a все значения x, не удовлетворяющие этому неравенству, образуют промежуток длины 6?

Б.9 Химический факультет, *май*

1120. Решить уравнение $x^2 + 1 + |x - 1| = 2|x|$.

1121. Решить неравенство

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2-x}{x}} - \frac{x+1}{2x}\right)^2} \geqslant 0.$$

1122. Найти все решения системы

$$\begin{cases} 2\sin 3x + 2\cos 4x = 1 + \sqrt{2} \\ 2\sin 7x - 2\sin x = \sqrt{2} \end{cases}$$

на отрезке $[0; \pi]$.

1123. Из точки M окружности с центром O и радиусом 4 на диаметры AB и CD опущены перпендикуляры MH и MK соответственно. Найти площадь треугольника MHK, если $\angle AOC = \pi/9$ и $\angle MHK = 2\pi/9$.

1124. В шар радиуса 3 вписан многогранник $ABCDE$, у которого вершины A и E симметричны относительно плоскости BCD, а вершины B и D симметричны относительно плоскости ACE. Найти отношение объема многогранника к объему шара, если $AC = BC = 3\sqrt{2}$.

1125. При каждом $a \in [-1; 0]$ решить неравенство

$$\log_{x+a}(x^2 - (a+1)x + a) \geqslant 1.$$

1126. Функция f удовлетворяет при любых x, y равенству

$$f\left(\frac{x+2y}{3}\right) = \frac{f(x) + 2f(y)}{3}.$$

Найти $f(1999)$, если $f(1) = 1$ и $f(4) = 7$.

Б.10 Высший колледж наук о материалах, *май*

1127. Решить уравнение $(7\sin x - 4\sqrt{3})(7\sin x - 5\sqrt{2}) = 0$.

1128. Решить систему

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3x}{2}} + \log_3^3 y = 504 \\ 4^x - 2^{x-1}\log_{\sqrt{3}} y + \log_3^2 y = 84. \end{cases}$$

1129. Из пункта A в пункт B отправились бегун и пешеход, а из B в A одновременно с ними — второй пешеход. Скорость бегуна равнялась 12 км/ч, а скорости пешеходов вначале были одинаковы. Бегун и второй пешеход, встретились и, побеседовав некоторое время, отправились в B, причем пешеход уменьшил свою скорость в полтора раза. В результате пешеходы прибыли в B одновременно,причем позже бегуна на время, вдвое превышающее время беседы. Найти скорость первого пешехода.

1130. В круг с центром O вписан четырехугольник $ABCD$ со стороной $AB = 10$ и перпендикулярными диагоналями, причем $\angle COD = 3\angle AOB$. Найти площадь S круга. Что больше: S или 510 ?

1131. Знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии отрицателен. Найти все целые m, при которых сумма членов с нечетными номерами больше суммы членов с четными номерами на величину, равную второму члену, умноженному на число вида $m^2 + 10m + 20$.

Б.11 Химический факультет и Высший колледж наук о материалах, *июль*

1132. Решить неравенство $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} \leqslant 2$.

1133. Решить уравнение

$$(\sin x + \cos x - \sqrt{2})\sqrt{-11x - x^2 - 30} = 0.$$

1134. Решить неравенство

$$\log_{3-x}(2x+1)\cdot\log_{2x+1}x^2 \leqslant \log_{3-x}(3x+1)\cdot\log_{3x+1}(x+2).$$

1135. Сторона AC треугольника ABC касается окружности радиуса 2, проходящей через точки A и B, и окружности радиуса 3, проходящей через точки B и C. Найти AC, если $\angle B = \pi/6$.

1136. Найти площадь поверхности параллелепипеда объемом 8, вписанного в сферу радиуса $\sqrt{3}$.

1137. Найти все a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right| = a^2+1$$

имеет нечетное число корней.

1138. Числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяет при любом натуральном n условию

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n+2, & \text{если } n \text{ — нечетно,} \\ 2a_n, & \text{если } n \text{ — четно.} \end{cases}$$

Найти a_{1999}, если $a_1 = 0$.

Б.12 Биологический факультет и Факультет фундаментальной медицины, *июль*

1139. Решить уравнение $8\cos 6x - 12\sin 3x = 3$.

1140. Решить неравенство $\dfrac{3}{|x-1|} \geqslant 2x+5$.

1141. Решить уравнение

$$\log_{8-7x}\left(x^3-3x^2-\frac{37}{8}x+\frac{55}{8}\right)+2\log_{(8-7x)^2}(x+3) = 1.$$

1142. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ во внешнюю сторону построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$. Найти AD, если $BC = 2$, $FG = 18$ и $GO = 7$, где O — точка пересечения диагоналей трапеции.

1143. Найти все $y > 1/2$, при которых неравенство

$$16y^3 + 6y^3x - 4y^3x^2 - 50y^2 - 11y^2x + 10y^2x^2 + \\ + 52y + 4yx - 8yx^2 - 18 + x + 2x^2 > 0$$

выполнятся для всех $x \in (1; 2y)$.

1144. Два велосипедиста стартовали одновременно в противоположных направлениях из точек A и B круговой велотрассы. Найти отношение их скоростей, если из первых 15 встреч велосипедистов после старта только третья и пятнадцатая произошли в точке A, а к моменту их пятой встречи каждый из них проехал не менее одного круга.

Б.13 Факультет почвоведения, *май*

1145. Что больше:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\log_{81}\frac{1}{27} \quad \text{или} \quad \sin\frac{43\pi}{6}\,\mathrm{tg}^3\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\mathrm{ctg}\,\frac{4\pi}{3}\ ?$$

1146. Решить уравнение $|\cos x - 1/2| = \sin x - 1/2$.

1147. Решить неравенство $3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}$.

1148. Сумма десяти чисел равна нулю. Сумма их попарных произведений также равна нулю. Найти сумму кубов этих чисел.

1149. На медианах AM, BN и CK треугольника ABC площадью 2 взяты точки P, Q и R соответственно так, что $AP : PM = 1 : 1$, $BQ : QN = 1 : 2$ и $CR : RK = 5 : 4$. Найти площадь треугольника PQR.

1150. Найти все a, при которых уравнение

$$(x^2 + 2)(x^2 + 5x + 6) = a$$

имеет ровно три различных корня.

Б.14 Факультет почвоведения, *июль*

1151. Решить уравнение $3^x - \dfrac{88}{3^x} = 42$.

1152. Решить уравнение $\cos 2x = \sin x$.

1153. Решить уравнение

$$\left(\frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{-1}{|2-x^2|}}.$$

1154. Решить неравенство $\frac{1}{2}\log_3 x^2 \geqslant \frac{1}{3}\log_3(-x^3)$.

1155. Сколько литров 3%-го раствора спирта нужно добавить к 1 л 6%-го, чтобы получить 5%-й раствор?

1156. На высоте $CH = \sqrt{6}/3$ треугольника ABC со стороной $AB = \sqrt{3}/2$ лежит центр окружности, вписанной в угол ABC. Найти радиус окружности, если $AH : BH = 2 : 1$.

1157. При каждом $a \geqslant 0$ решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \leqslant a.$$

Б.15 Геологический факультет, *май*

1158. Решить уравнение $\cos(6\sin x) = -1$.

1159. Решить систему

$$\begin{cases} 4x + 5y = \sqrt{16x^2 - 25y^2} \\ x^2 + 6x - 7 = 0. \end{cases}$$

1160. Найти наибольшее значение a, при котором уравнение

$$\operatorname{arctg}\left|9^x + 4^4 + a\sqrt{2}\,6^x\right| = 0$$

имеет решение.

1161. Найти двузначное число, сумма квадрата цифры десятков которого и ушестеренной цифры единиц равна упятеренной сумме произведения цифр и 1.

1162. Решить двойное неравенство

$$2 < |2\log_{1/2}(3x+1) - 4| \leqslant 3.$$

1163. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны по 2. Плоскость, параллель-

ная прямым AC и SB, пересекает ребра AB и BC в точках M и N. Найти периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если $MN = \sqrt{2}$.

1164. Решить неравенство

$$\sqrt{4x - x^2 - 3} \geqslant \sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

1165. Две окружности радиусов $\sqrt{19}$ и $\sqrt{76}$, касающиеся друг друга внешним образом, касаются также некоторой полуокружности и ее диаметра. Найти радиус этой полуокружности.

Б.16 Геологический факультет, *июль*

1166. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+3}\log_{1/2}(x^2+1)}.$$

1167. Вычислить $A = x_1 + 3x_1x_2 + x_2$, где $x_{1,2}$ — корни квадратного трехчлена

$$f(x) = 2x^2 + (1 - 3\sqrt{2})x - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.$$

Что больше: A или $-1,999$?

1168. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} x(x - y - \sqrt{3}) \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 3. \end{cases}$$

1169. Медиана BM треугольника ABC равна половине стороны AC, а один из углов, образованных биссектрисой BL и стороной AC, равен 55°. Найти углы треугольника ABC.

1170. Решить уравнение

$$\left|-\cos^2 2x + 3\sqrt{-\cos 2x} + 1/4\right| = \left|\cos^2 2x + 3\sqrt{-\cos 2x} - 1/4\right|.$$

1171. Третий и восьмой члены арифметической прогресии равны 13 и -7 соответственно. При каком количестве

членов этой прогрессии их сумма максимальна и чему она равна?

1172. Найти объем куба $ABCDA'B'C'D'$, если сфера радиуса $\sqrt{41}$ проходит через точки A, B, C и середину ребра $A'D'$.

1173. Решить неравенство $\log_{\frac{x}{2}+5}\sin x \geqslant \log_{8x-x^2+9}\sin x$.

Б.17 Географический факультет, *май*

1174. Решить уравнение $2\cos 4x - \sin 2x = -1$.

1175. Сумма первых пяти членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15, а их произведение равно 1155. Найти шестидесятый член прогрессии.

1176. Решить уравнение $\sqrt{|x^2+14x+47|-1} = |x+7|-1$.

1177. Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке F, $\angle AFE = 60°$.

1) Найти $\angle C$.

2) Найти площадь треугольника ABC, если $AB = 2$ и $\angle CED = 45°$.

1178. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} y^2-(2a+1)y+a^2+a-2=0 \\ \sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-3)^2}=3 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

1179. Ребра треугольной пирамиды равны 15, 9, 9, 12, 12 и 3. Найти объем пирамиды и радиус описанной около нее сферы.

Б.18 Географический факультет, *июль*

1180. Решить уравнение $\log_{4x-8}(x^2-2x-3) = 1$.

1181. Решить уравнение $\sqrt{2x^2-8x+5} = x-2$.

1182. Из пункта A в пункт B по реке вышел катер, а из B в A одновременно с ним — моторная лодка. Пройдя три четверти пути от A к B, катер встретился с лодкой, а достигнув пункта B, повернул обратно и прибыл в A одновременно с ней. Найти отношение собственных скоростей катера и лодки.

1183. Найти все a, при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x + 6a\cos x - \sin x - 3a = 0$$

найдутся два, удаленные друг от друга на расстояние $3\pi/2$.

1184. Диагонали описанного около окружности четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а точки M и N — середины сторон AD и BC соответственно, причем точка E лежит на отрезке MN. Найти радиус окружности, если $AB = 3$, $AC = \sqrt{13}$ и $ME : NE = 3 : 1$.

1185. Все плоские углы трехгранного угла с вершиной S равны по $90°$. Сфера пересекает одно его ребро в точках A_1 и A_2, второе — в точках B_1 и B_2, а третье — в точках C_1 и C_2. Найти площадь треугольника $A_2B_2C_2$, если площади треугольников SA_1B_1, SA_1C_1, SB_1C_1 и SA_2B_2 равны $15/2$, 10, 6 и 40 соответственно.

Б.19 Филологический факультет (специальность "прикладная лингвистика"), *июль*

1186. Автомобиль проехал часть пути по ровной дороге со скоростью 80 км/ч, а другую часть — по бездорожью со скоростью 20 км/ч. Какую часть его пути составляла ровная дорога, если средняя скорость автомобиля оказалась равной 40 км/ч?

1187. Решить неравенство $\dfrac{1}{x^2+8x-9} \geqslant \dfrac{1}{3x^2-5x+2}$.

1188. Медианы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке K. Найти площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника $CMKN$ равна 5.

1189. Решить уравнение $\log_{1-2\cos x}(\cos 2x + \sin x + 2) = 0$.

1190. Решить систему

$$\begin{cases} \cos^2(x + 4y + \pi/4) + \dfrac{1}{\sin(2x + 2y - \pi/4)} = 0 \\ \cos(3x + \pi/4) + \dfrac{1}{\sin^3(4x - 2y - \pi/4)} = 0. \end{cases}$$

Б.20 Экономический факультет (отделение экономики), *июль*

1191. Решить неравенство $\log_{|x|-2}|x-3| \leqslant 0$.

1192. Решить неравенство

$$4\sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \leqslant 14\sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x - 1}}.$$

1193. Первая и вторая бригады, работая вместе, выполняют задание не более, чем за 9 дней, вторая и третья — не менее, чем за 18 дней, а первая и третья — ровно за 12 дней, причем третья бригада имеет при указанных условиях максимальную производительность. За сколько дней выполняет это задание одна вторая бригада?

1194. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC равны $5a$ и $7a$ соответственно. Найти площадь трапеции, если $\angle CAD = 2\angle ADB$.

1195. Решить уравнение

$$x + \frac{1}{6}\arccos(\cos 15x + 2\cos 4x \sin 2x) = \frac{\pi}{12}.$$

1196. Ребро $AD = d$ тетраэдра $ABCD$ служит диаметром сферы, пересекающей ребра BD и CD в их серединах. Найти объем тетраэдра, если $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ACD = \angle ABD = \beta < \pi/4$.

1197. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} a\sin|2x| + \log_5(x\sqrt[8]{2-5x^8}) + a^2 = 0 \\ ((y^2-1)\cos^2 z - y\sin 2x + 1)\times \\ \qquad \times(1+\sqrt{\pi+2z}+\sqrt{\pi-2z}) = 0 \end{cases}$$

имеет не более двух различных решений, но не менее одного. Найти эти решения.

Б.21 Экономический факультет (отделение менеджмента), *июль*

1198. Решить неравенство

$$\log_{1+|7x+17|}(|3x+8|+|7x+17|) \leqslant 1.$$

1199. Решить уравнение $4\sqrt{\dfrac{2^x-1}{2^x}} = 7\sqrt{\dfrac{2^x}{2^x-1}} - \sqrt{14}.$

1200. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если $AC = \sqrt{2}\,a$, $BD = \sqrt{3}\,a$ и $\angle BAC = 60°$

1201. Решить уравнение $x = \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6x + \cos 7x).$

1202. Первая и вторая бригады, работая вместе, выполняют задание не более, чем за 9 дней, вторая и третья — не менее, чем за 18 дней, а первая и третья — ровно за 12 дней. За какое наименьшее количество дней при указанных условиях может выполнить это задание одна третья бригада?

1203. При каждом a решить уравнение

$$\log_4(x\sqrt[8]{1-4x^8}) + a\sin 2y = a^2.$$

Б.22 Факультет психологии, *июль*

1204. Решить неравенство $\dfrac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1.$

1205. Решить уравнение $x^{\log_7 4} + 5\cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0.$

1206. Решить систему

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 3/4 \\ \cos x \sin y = \sqrt{6}/4 \\ \cos x \geqslant 0. \end{cases}$$

1207. Найти все a, при которых множество значений функции

$$f(x) = \frac{3x + a}{x^2 + 5x + 7}$$

содержит промежуток $(-1; 3]$. При каждом таком a найти множество значений этой функции.

1208. Найти площадь вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$, если $AB = 9, CD = 4$, $AC = 7$ и $BD = 8$.

1209. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0 \\ axy + ayz + axz > xyz \end{cases}$$

имеет ровно пять различных решений в натуральных числах.

Б.23 Социологический факультет, *июль*

1210. Решить уравнение $\sqrt{x-1} = 6 - x$.

1211. Найти разность арифметической прогрессии и первый ее член, если его квадрат равен сумме первых пяти членов прогрессии с нечетными номерами и на 1 больше суммы первых пяти членов с четными номерами.

1212. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы BAC и BDC равны, а площадь круга, описанного около треугольника BCD, равна $25\pi/4$. Найти:

1) радиус окружности, описанной около треугольника ABC;

2) площадь четырехугольника $ABCD$, если $AC = 4$, $BC = 3$ и $\angle BAD = 90°$.

1213. Кандидат в депутаты имеет право на одно бесплатное выступление в газете, увеличивающее число его сторонников на 1000 человек, а также на выступления по радио и по телевидению, увеличивающие число сторонников на 40% и 80% соответственно и сто́ящие 32 и 47 тыс. руб. соответственно. В каком порядке и количестве нужно выступать кандидату в этих средствах массой информации, чтобы, израсходовав не более 112 тыс. руб., приобрести наибольшее число сторонников?

1214. Решить неравенство $\dfrac{4|2-x|}{4-|x|} - |x-2| \leqslant 0.$

1215. Найти все a, при которых неравенство

$$\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{\frac{16}{\arcsin^4(x+3a)}} \geqslant \left|\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{\frac{16}{\arcsin^4(x+3a)}}\right|$$

не имеет решений на отрезке $[-5;6]$.

Б.24 Институт стран Азии и Африки (социально-экономическое отделение), *июль*

1216. Решить уравнение

$$\frac{1}{8}\log_2^2(3x-2)^4 = \frac{\lg(2-3x)}{\lg 2}\, 7^{2\log_7\sqrt{3}}.$$

1217. Решить уравнение

$$4\sin 4x\cos 2x + 5\cos 3x = 5\cos 5x.$$

1218. Вычислить

$$A = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{ax}+x+x\sqrt{x})^2(1-x\sqrt{x})^2}{a^{-1/4}(x+x^{-1}-2)(1+x+\sqrt{x})^2} - x(x+\sqrt{a})^2\sqrt[4]{a}.$$

1219. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой 3 и острым углом 30°, а боковые

ребра равны между собой и наклонены под углом 70° к плоскости основания. Найти объем пирамиды.

1220. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-3}-3}{|x+2|-5} \geqslant 1$.

1221. Окружности радиусов 2 и 3 касаются друг друга внешним образом в точке A. Общая касательная к ним, проходящая через точку A, пересекает в точке B другую общую касательную, проходящую через точку C меньшей окружности с центром O. Найти радиус окружности, вписанной в четырехугольник $OABC$.

1222. Решить систему

$$\begin{cases} x^2-2y^2 \leqslant 65-x^4-3^{x+3} \\ x^2+3^{x+2} \geqslant y^2-2y+25. \end{cases}$$

Приложение В.

Программа по математике в МГУ им. М. В. Ломоносова в 1999 г.

Настоящая программа состоит из трех разделов.

В первом разделе перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть поступающий как на письменном, так и на устном экзамене.

Второй раздел представляет собой перечень вопросов теоретической части устного экзамена. При подготовке к письменному экзамену целесообразно познакомиться с формулировками утверждений этого раздела.

В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего на письменном и устном экзаменах.

Объем знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств из этого курса, включая и начала анализа. Однако для решения экзаменационных задач достаточно уверенного владения лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающими, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием отдельные утверждения второго раздела могут в некоторых учебниках называться иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вовсе отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать все эти утверждения.

I. Основные понятия

1. Натуральные числа. Делимость. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

2. Целые, рациональные и действительные числа. Проценты. Модуль числа, степень, корень, арифметический корень, логарифм. Синус, косинус, тангенс, котангенс числа (угла). Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.

3. Числовые и буквенные выражения. Равенства и тождества.

4. Функция, ее область определения и область значений. Возрастание, убывание, периодичность, четность, нечетность. Наибольшее и наименьшее значения функции. График функции.

5. Линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические функции.

6. Уравнение, неравенство, система. Решения (корни) уравнения, неравенства, системы. Равносильность.

7. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

8. Прямая на плоскости. Луч, отрезок, ломаная, угол.

9. Треугольник, Медиана, биссектриса, высота.

10. Выпуклый многоугольник. Квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция. Правильный многоугольник. Диагональ.

11. Окружность и круг. Радиус, хорда, диаметр, касательная, секущая. Дуга окружности и круговой сектор. Центральный и вписанный углы.

12. Прямая и плоскость в пространстве. Двугранный угол.

13. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.

14. Цилиндр, конус, шар, сфера.

15. Равенство и подобие фигур. Симметрия.

16. Параллельность и перпендикулярность прямых, плоскостей. Скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью.

17. Касание. Вписанные и описанные фигуры на плоскости и в пространстве. Сечение фигуры плоскостью.

18. Величина угла. Длина отрезка, окружности и дуги окружности. Площадь многоугольника, круга и кругового сектора. Площадь поверхности и объем многогранника, цилиндра, конуса, шара.

19. Координатная прямая. Числовые промежутки. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Векторы.

II. Содержание теоретической части устного экзамена

Алгебра

1. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.

2. Свойства числовых неравенств.

3. Формулы сокращенного умножения.

4. Свойства линейной функции и ее график.

5. Формула корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители. Теорема Виета.

6. Свойства квадратичной функции и ее график.

7. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.

8. Формулы общего члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии.

9. Формулы общего члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии.

10. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями. Свойства арифметических корней n-й степени. Свойства степеней с рациональными показателями.

11. Свойства степенной функции с целым показателем и ее график.

12. Свойства показательной функции и ее график.

13. Основное логарифмическое тождество. Логарифм произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию.

14. Свойства логарифмической функции и ее график.

15. Основное тригонометрическое тождество. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы приведения, сложения, двойного и половинного аргумента, суммы и разности тригонометрических функций. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму. Преобразование выражения $a \sin x + b \cos x$ с помощью вспомогательного аргумента.

16. Формулы решений простейших тригонометрических уравнений.

17. Свойства тригонометрических функций и их графики.

Геометрия

1. Теоремы о параллельных прямых на плоскости.

2. Свойства вертикальных и смежных углов.

3. Свойства равнобедренного треугольника.

4. Признаки равенства треугольников.

5. Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Свойства средней линии треугольника.

6. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников.

7. Признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора.

8. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла.

9. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника.

10. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону.

11. Свойство касательной к окружности. Равенство касательных, проведенных из одной точки к окружности. Теоремы о вписанных углах. Теорема об угле, образованном касательной и хордой. Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между двумя секущими, выходящими из одной точки. Равенство произведений отрезков двух пересекающихся хорд. Равенство квадрата касательной произведению секущей на ее внешнюю часть.

12. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность. Свойство четырехугольника, описанного около окружности.

13. Теорема об окружности, вписанной в треугольник. Теорема об окружности, описанной около треугольника.

14. Теоремы синусов и косинусов для треугольника.

15. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.

16. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма.

17. Свойства средней линии трапеции.

18. Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности.

19. Теоремы о параллельности прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей.

20. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. Признак перпендикулярности плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

III. Требования и поступающему

На экзамене по математике поступающий должен уметь:

1) выполнять (без калькулятора) действия над числами и числовыми выражениями; преобразовывать буквенные выражения; производить операции над векторами (сложение, умножение на число, скалярное произведение); переводить одни единицы измерения величин в другие;

2) сравнивать числа и находить их приближенные значения (без калькулятора), доказывать тождества и неравенства для буквенных выражений;

3) решать уравнения, неравенства, системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения;

4) исследовать функции; строить графики функций и множества точек на координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами;

5) изображать геометрические фигуры на чертеже; делать дополнительные построения; строить сечения; исследовать взаимное расположение фигур; применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду;

6) пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий;

7) пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей, свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур;

8) пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические и тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объемы;

9) составлять уравнения, неравенства и находить значения величин, исходя из условия задачи;

10) излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.

На устном экзамене поступающий должен дополнительно уметь:

11) давать определения, формулировать и доказывать утверждения (формулы, соотношения, теоремы, признаки, свойства и т. п.), указанные во втором разделе настоящей программы;

12) анализировать формулировки утверждений и их доказательства;

13) решать задачи на построение циркулем, линейкой; находить геометрические места точек.

Ответы

1. 271

2. 47

3. -1

4. 8

5. $x = \pm 1$

6. $-6 < x < 6$

7. $x \leqslant -98,\ x \geqslant 96$

8. $x > 3$

9. $x < 0,\ 0 < x < 1$

10. $\frac{3}{7} < x < \frac{11}{7}$

11. $-2 \leqslant x < 1,\ 1 < x \leqslant 4$

12. $x \leqslant -1,\ x = 0,\ x \geqslant 1$

13. $x = 2$

14. $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

15. $x > 4$

16. $x < 3/2$

17. $x < 2 - \log_3 2$

18. $x = \frac{1}{2} \log_{\frac{3}{2}} \frac{15}{2}$

19. $x = 0,\ -2$

20. $5^{\log_3 2}$

21. $\frac{203}{121}$

22. $-\sqrt{7}/4$

23. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$

24. $-3/5$

25. $-2/3; -\sqrt{5}$

26. $x = 1 \pm \frac{1}{6} + 2n$,
где $n \in \mathbf{Z}$

27. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

28. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$,
$\frac{(-1)^k 2\pi}{3} + 4\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

29. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$, где $n \in \mathbf{Z}$

30. $x = \pi n, \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$,
где $n, k \in \mathbf{Z}$

31. $x = \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

32. $x = \pi + 2\pi n, \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi k$,
где $n, k \in \mathbf{Z}$

33. $x = \pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k$,
где $n, k \in \mathbf{Z}$

34. $x = \frac{\pi}{3}n,\ x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k$,
где $n, k \in \mathbf{Z}$

35. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$,
где $n \in \mathbf{Z}$

36. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, \frac{(-1)^k \pi}{18} + \frac{\pi}{3}k$,
где $n, k \in \mathbf{Z}$

37. $x = \pi n, \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$,
где $n, k \in \mathbf{Z}$

38. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

39. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, где $n \in \mathbf{Z}$

40. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$,
где $n, k \in \mathbf{Z}$

41. $x = \pi n, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$,
где $n, k \in \mathbf{Z}$

42. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$,
где $n, k \in \mathbf{Z}$

43. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

44. $x = 4\pi/3$

45. $x = (-1)^n + \frac{\pi}{5}n$,
где $n \in \mathbf{Z}$

46. $x = \frac{5}{4} + \frac{\pi}{2}n, -\frac{5}{6} + \frac{\pi}{3}k$,
где $n, k \in \mathbf{Z}$

47. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n,\ \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k,$
где $n, k \in \mathbf{Z}$
48. $x = \frac{2\pi}{5}n,\ \frac{\pi}{4} + \pi k,$
$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}m$, где $n, k, m \in \mathbf{Z}$
49. $x = \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{8} + \pi n,$
где $n \in \mathbf{Z}$
50. $x = \arccos \frac{5}{\sqrt{29}} \pm$
$\pm \arccos \frac{3}{\sqrt{29}} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$
51. $x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n,\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,$
где $n, k \in \mathbf{Z}$
52. $x = (1 + (-1)^n) \times$
$\times \arcsin \frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} + \pi n,$
где $n \in \mathbf{Z}$
53. $-\sqrt{41} \leqslant a \leqslant \sqrt{41}$
54. $\frac{20\sqrt{5}-3}{60+18\sqrt{5}}$
55. $-1/\sqrt{3}$
56. 2
57. $-3/2$
58. 1
59. $-3 < x < 1$
60. $x < 0$
61. $x = -1/2,\ 5/2$
62. $-2 < x < -17/9,\ x > 7$
63. $-5 - 2\sqrt{2} < x \leqslant -11/2,$
$-9/2 \leqslant x < -5 + 2\sqrt{2}$
64. $-77 < x < 3$
65. $0 \leqslant x < 1$
66. $x > 0$
67. $0 < x \leqslant 3^{-2\sqrt{3}},\ x \geqslant 3^{2\sqrt{3}}$
68. $0 < x < 2$
69. $0 < x < 1/16$
70. $x = -2^{-9/4}$
71. $x = 4$
72. $1 < x \leqslant 3/2$
73. $0 < x < 2$
74. $x = 1 + \sqrt{3}$
75. $x = 4$
76. $0 < x < 1,\ 1 < x \leqslant 2$
77. $-2 < x < 0,\ 0 < x < 2$
78. $x > 2$
79. $x = 5, y = -2$
80. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ y = \sqrt{2},$
где $n \in \mathbf{Z}$
81. $x = -2, y = 0$
82. $x = 2, y = 6;$
$x = 1/2, y = 10$
83. $x = 1/2, y = 11/2;$
$x = 3/2, y = 11/2$
84. $a < 6$
85. $a = -2$
86. 9 и 2
87. 17
88. 1/2
89. 4
90. 9
91. 50
92. $2\frac{1}{2}$, 4 и $5\frac{1}{2}$
93. 20 м
94. $16 + 24 + 40 + 48$
95. 7,2%
96. 1085 и 30
97. 1000 л
98. 210 руб
99. $5 + (\frac{1}{5})^{29}$ мл
100. 78,2

101. 15 т

102. 1 и 2 кг

103. 6 кг

104. 2/5

105. 6/5

106. 3 м

107. 11/4

108. 16 км/ч

109. 50 и 100 км/ч

110. 160 км

111. 36 : 31

112. $13\frac{1}{3}$, 40, 10

113. 20 и 18

114. 90

115. 202,8

116. $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$

117. 2 : 5

118. $\sqrt{3}+1$

119. $10r^2(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3})$

120. 6

121. 2 : 3

122. 5 и 20

123. 18 : 7

124. $\frac{228}{25}$

125. $9\sqrt{2}/4$

126. $\frac{\pi}{12}$ и $\frac{5\pi}{12}$

127. 32/5

128. 9 : 20

129. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, R

130. 6

131. $\frac{91(6-\sqrt{6})}{30}$

132. $9\sqrt{3}/11$

133. $\frac{a\sin(\alpha+\beta)(1+3\sin^2\beta)}{12\sin\alpha\sin\beta}$

134. $\sqrt{3}/4$; 7

135. $2\,\mathrm{arctg}(5\,\mathrm{tg}\,\alpha)$

136. 4

137. $\frac{25}{64}\sqrt{15}$

138. 9

139. $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{7\sqrt{2}}{10}$

140. 72

141. 1 и 7

142. 10

143. 6

144. $\frac{4aR^2}{16R^2-3a^2}$

145. 16

146. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

147. $2R^2\cos\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

148. $1:\sqrt{15}$

149. $3\sqrt{2}$

150. $3\sqrt{3}/4+1$

151. $\frac{\sqrt{37}(2\sqrt{6}-1)}{3\sqrt{3}}$

152. $\sqrt{a(a-b)}$

153. 9

154. 1/2

155. $\sqrt{ab}$

156. 4

157. $\frac{3\pi}{7}$

158. $\frac{am}{n}$

159. $\sqrt{mn}$

160. $\frac{1}{4}\sqrt{(4b^2-a^2)(a^2-b^2)}$

161. $\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{3\sin(\beta+\gamma)}$

162. 4/5

163. 15

164. $\arcsin\frac{a}{h}$

165. $\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2\alpha$
166. $9/2$
167. $c\sqrt{2+c/b}$
168. $AB=\sqrt{13}$,
$BC=2\sqrt{13}$, $AC=3\sqrt{5}$
169. 8
170. $\sqrt{3}$
171. $48\pi\sqrt{11}$
172. $12\pi r^3$
173. $d^3\sin\alpha\sin\beta\times$
$\times\sqrt{1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta}$
174. $\sqrt[3]{\frac{8V\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3(2\cos\alpha-1)}}}$
175. $\frac{a}{4\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$
176. $\frac{r^3}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-2\cos\alpha}$
177. $\sqrt{31}/6$
178. 216
179. $21\sqrt{15}/10$
180. $91/25$
181. $\frac{\sqrt{6}(5-\sqrt{15})}{10}$
182. $\frac{2a^2}{9\sqrt{3}\cos\varphi}$
183. $\frac{2}{3}H^3\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)$
184. $\frac{12}{13+\sqrt{41}}$
185. $1/3$
186. 16
187. $(15/2;0;0)$
188. $3x+4y+6z=29$
189. $\arccos\frac{6}{7}$
190. x — любое
191. $-3-\sqrt{13}<x<-3+\sqrt{13}$
192. 1
193. $a\neq 1$
194. $-2\leqslant x\leqslant 3$
195. $-5\leqslant x<-4$,
$-2<x\leqslant 5$
196. $-3<x<-2$,
$-2<x\leqslant -1$
197. $x=-1,\ 4$
198. $x<-1/6$, $x>1/12$
199. $x=\pm 3,\ x=\pm\sqrt{2}$
200. $-2<x<2$
201. $-\sqrt{7}<x<\sqrt{7}$
202. $x=-1$
203. $x<1$
204. $x<2$
205. $x=1$
206. $x<\log_2 3$
207. $x=2$
208. $x=\log_{0,3}3$
209. $x\leqslant\log_{1/3}2$
210. $x=\log_2 3$
211. $x=\log_2 a^2$ при $a<0$;
$x=\log_2 a^2$, $\log_2 a$ при $a>0$;
при $a=0$ корней нет
212. $x=3;\ 27$
213. $x=2;\ 16$
214. $0<x<1/125$; $x>5$
215. $x=1/10;\ 10^{\sqrt{2}}$
216. корней нет
217. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n$, где $n\in\mathbf{Z}$
218. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$,
где $n\in\mathbf{Z}$
219. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$,
где $n\in\mathbf{Z}$

220. $x = \frac{(-1)^n\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

221. $x = \frac{(-1)^n\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

222. $a < -2$; $a > 2$

223. $1 < x < 3$

224. $x > 3$

225. $1/2 \leqslant x < 1$; $2 < x \leqslant 5/2$

226. $x = \sqrt{11}/4$

227. $1 < x \leqslant 2$; $3 \leqslant x < 4$

228. $x = 3$

229. $5 < x \leqslant 6$

230. $x = 3/2$

231. $-2 < x < 3$

232. $x = 9/5$

233. $-3 \leqslant x < -2$; $0 < x \leqslant 1$

234. $x = 3$

235. $x = 2^{4-4\sqrt{2}}$

236. $x = 3 - \sqrt{a+5}$ при $a > -4$, $a \neq -1$; при остальных a корней нет

237. $0 \leqslant x < 4$

238. $x = 3$

239. $x = 9$; 81

240. $0 \leqslant x \leqslant 1$

241. $x = -1/3$; 4

242. $x = \frac{\pi}{8} + \pi n/2$, где $n \in \mathbf{Z}$

243. $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{6} + \frac{\pi}{2}n$, где $n \in \mathbf{Z}$

244. $x = -\frac{\pi}{3} \pm \arccos\frac{3}{4} + 2\pi n$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

245. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n$, $\frac{1}{3}\operatorname{arcctg} 6 + \frac{\pi}{3}k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

246. $x = 81$

247. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

248. $x = 6/5$, $4/5$

249. $x = \pm\arcsin\frac{3}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

250. $-2 < x < -\sqrt{2}$; $\sqrt{2} < x < 2$

251. $x = 2$; $1/128$

252. $x > 1$

253. $x > \frac{1}{2}\log_3\frac{11}{3}$

254. $x \geqslant \frac{1}{2}\log_2 3 - 1$

255. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

256. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $\pm\frac{1}{2}\arccos(-\frac{3}{5}) + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

257. $x = \frac{(-1)^n}{5}\arcsin(\sqrt{13}-3) + \frac{\pi}{5}n$, где $n \in \mathbf{Z}$

258. $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{37}-1}{6} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

259. $x = \pm 5\pi/12 + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

260. $x = \sqrt{17} - 4$

261. $x = \frac{2\sqrt{161}-8}{5}$

262. $\frac{7-\sqrt{33}}{2} \leqslant x < 3$

263. $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

264. $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

265. $x = 2^{(3+\sqrt{5})/2}$

266. $-\sqrt{7} < x \leqslant -\sqrt{3}$; $\sqrt{3} \leqslant x < \sqrt{7}$

267. $x = \pm\sqrt{-\log_2 \frac{6-\sqrt{26}}{2}}$

268. $x = 5^{\pm\sqrt{\log_3(2+\sqrt{3})}}$

269. $x = -1 \pm \sqrt{2}$

270. $x = \frac{-9 \pm \sqrt{\frac{1}{2}+2n}}{13}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$

271. $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

272. $x = \frac{(-1)^n}{2} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} n$, где $n \in \mathbf{Z}$

273. $3 - 2\sqrt{5} < a < \sqrt{10} - 2$

274. $x = 2, y = 3$; $x = 33/8, y = -27/8$

275. $x = 0, y = -3$

276. $x = 1, y = \log_3 2$

277. $x = \sqrt[3]{3}, y = 4$

278. $x = y = 1$

279. $x = -1, y = 1/\sqrt{3}$; $x = 3/2, y = 9$

280. $a = \pm\sqrt{2}$

281. $x = -1/4, y = 5/4$

282. 162

283. 3

284. 42,3%

285. 83

286. 5

287. 20/3 и 16/3 ч

288. 20 км/ч

289. 45 км/ч

290. 290 км; 2 км/ч

291. 4 км/ч

292. 9, 12 и 15

293. 8 и 5

294. $2\pi/3$

295. 2

296. 6/23

297. $2\sqrt{21} - 9$

298. 10 и 2; $5\sqrt{5}/2$

299. $\pi/4$, $3\pi/4$

300. $\frac{1+\sqrt{33}}{8}$

301. $x = -4/3, -2/3$

302. $x = -2, 5$

303. $x = 4, y = 2$; $x = 4/3, y = -2/3$

304. $x = 1$

305. $x = 1/6$; 2

306. $x = -3$

307. $x = \frac{(-1)^n \pi}{4} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

308. $x = \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

309. $x = 5a/3$ при $a \neq 0$; при $a = 0$ корней нет

310. $x \leqslant 2 - \sqrt{8}$, $x = 2$, $x \geqslant 2 + \sqrt{8}$

311. $x < 1$, $4 < x < 5$

312. $x < 1$, $x = 2$

313. $x < 2$, $2 < x < 3$, $x > 5$

314. $x < 0$, $x = 3/2$, $x > 2$

315. $-5 \leqslant x \leqslant 1$, $2 < x < 3$

316. $x \leqslant -1$, $2 \leqslant x < 11/4$, $11/4 < x \leqslant 3$, $x \geqslant 4$

317. $a < -3$, $a > -1$

318. $x \leqslant -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x \geqslant \sqrt{3}$

319. $1/5 \leqslant x \leqslant 1/4$, $x = 2/5$

320. $1 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $x = 3$

321. $-6 < x < -4$,
$-4 < x < 1$

322. $-2 < x < 0$, $2 < x < 5$

323. $1/3 < x \leqslant 3$

324. $x < -\sqrt{3}$, $x = 0$

325. $x = 4$, $x > 3 + \sqrt{3}$

326. $x = -3$, $x > 1$

327. $x > 3$

328. $0 < x < 1/3$, $x > 4$

329. $x \leqslant -1$, $x = -1/2$, $x \geqslant 0$

330. $0 < x < 1$, $1 < x < 4$,
$x > 64$

331. $x < -10^{1/3}$, $-1 < x < 0$,
$0 < x < 1$, $x > 10^{1/3}$

332. $0 < x < 4$, $x = 8$

333. $-27 < x < -1$,
$-1/27 < x < 0$

334. $1/4 \leqslant x < 1$, $x \geqslant \sqrt{2}$

335. $0 < x < \log_3 2$

336. $x \leqslant \log_3 \frac{1}{2}$,
$\log_3 \frac{3}{5} \leqslant x < \log_3 \frac{5}{3}$

337. $-3 < x < -2$, $x = -1$,
$0 < x < 1$

338. $1 \leqslant x < 5$, $x > 10$

339. $1 < x \leqslant 5^{\log_2 7}$

340. $x \leqslant -5/3$, $0 \leqslant x < 1/3$

341. $-(9 + \sqrt{57})/4 < x < -2$,
$-2 < x < -1$, $x > 3/2$

342. $x \leqslant -13/5$, $x \geqslant 3$

343. $x \leqslant 4/7$

344. $x < 0$, $x > 2$

345. $-5 \leqslant x < -4$,
$-2 < x \leqslant -2 + \sqrt{3}$

346. $x \leqslant -5$, $x = -5/4$

347. $-6 \leqslant x \leqslant -1$, $x \geqslant 0$

348. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$,
где $n \in \mathbf{Z}$

349. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} - 1$;
$x = 4$, $-4/9$

350. $1 < x < 3/2$

351. $1 < x \leqslant 4$

352. $\log_7 6 < x < 1$,
$x > \log_7 11$

353. $0 < x < 1/7$,
$1/2 < x < 1$

354. $x = 1$, $-15/11$

355. $x = 2$, $(5 + \sqrt{13})/2$

356. $x = 1, y = 1$;
$x = 2, y = 1/8$

357. $6\,\frac{a+b-3ab}{a+b+ab}$ при $a \neq 0$;
6 при $a = 0$

358. $15/2 < a < 8$, $a > 12$

359. $x = 1$ при $|a| > 1$;
$-3 \leqslant x \leqslant 1$ при $a = -1$;
$x = 1$, $\frac{a+7}{a-1}$ при $|a| < 1$;
$x \geqslant 1$ при $a = 1$

360. $4/3 \leqslant a \leqslant 2$

361. $a \neq 0$

362. $a \neq -3$

363. $-1/2 \leqslant a \leqslant 2/3$

364. $a = c = 1/4$, $b = 1/2$;
$a = 0$, $b = c = 1/2$

365. $n = 33$

366. -2

367. 2

368. 50 и 20 м

369. 14 км/ч

370. 50 и 40 км/ч

371. 5 л

372. $x = -7, y = 7$; $x = -6, y = 6$

373. 1) И; 2) да, Р

374. 49 и 83

375. 24

376. 832

377. 27

378. По 2 самолета каждого типа

379. $x \leqslant \log_3 2$, $1 < x < 5$

380. $-2 \leqslant x \leqslant -1$, $x = 3$

381. $3 < x < 7/2$, $x > 4$

382. $-2 \leqslant x < -\sqrt{2}$, $0 \leqslant x < -1 + \sqrt{2}$

383. $x < -1$, $2/5 < x \leqslant 1/2$, $x > 1$

384. $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $x \geqslant 5$

385. $-1 < x < 0$, $1 \leqslant x < 5$

386. $\log_2 \frac{1}{3} \leqslant x < 2$, $2 < x < \log_2 \frac{13}{3}$

387. $-1/\sqrt{2} < x < -1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{2}$

388. $-1/3 \leqslant x < 0$, $1/5 < x < (3 - \sqrt{3})/6$

389. $1 + \frac{\pi}{2}$

390. $2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$

391. 32

392. $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 13$

393. $27\pi + 18$

394. 15/2

395. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, $\frac{(-1)^k}{2} \arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \frac{\pi}{2}k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

396. $x = \frac{\pi}{2}n$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

397. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \frac{(-1)^k \pi}{6} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

398. $x = \frac{\pi}{2}n$, $\pm \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

399. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{5}k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

400. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $\frac{(-1)^k \pi}{6} + \frac{\pi}{2}k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

401. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n$, $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

402. $x = \frac{5\pi}{4} + 5\pi n$, $\pm\frac{5\pi}{8} - \frac{25\pi}{24} + 5\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

403. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

404. $x = \frac{\pi}{4}n$, где $n \in \mathbf{Z}$

405. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, где $n \in \mathbf{Z}$

406. $x = \frac{\pi}{4}n$, где $n \in \mathbf{Z}$

407. $x = \frac{\pi}{4}n$, $\frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{8}k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

408. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 4 + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

409. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{3}k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

410. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ \frac{\pi}{3} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

411. $x = \log_{3/5} 2$

412. $x > \log_{3/2} \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

413. $-1 < x < 0$

414. $-5/11 < a \leqslant -1/3$

415. $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$

416. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

417. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$, где $n \in \mathbf{Z}$

418. $x = 2\pi n,\ -\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

419. $x \leqslant 1,\ x \geqslant 2$

420. $x = 2,\ 9$

421. $x = 5/4,\ 5,\ 6$

422. $x = 5$

423. $-3/2 \leqslant a < -3/4$, $-3/4 < a < 0$

424. $a = \pm 1, b = -2$; a — любое, $b = 2$

425. $x = -2,\ 4/3,\ 3$

426. $a \leqslant -5\sqrt{5}/4,\ a \geqslant 5\sqrt{5}/4$

427. $a = 2$

428. $a = \pm\sqrt{2};\ \pm\frac{\sqrt{15}+1}{4}$

429. $1/2$ и $7/2$ л

430. $x = 0$

431. $x = (3 - \sqrt{17})/2$

432. $x = -\sqrt{3}$

433. $x = 7/9$

434. $x = 3$

435. $x = 1,\ x \geqslant 2$

436. $x \geqslant (2 + \sqrt{2})/5$

437. $3 < x \leqslant 5$

438. $x \leqslant -2$

439. $x \leqslant -2$, $-1 \leqslant x < (-1 + \sqrt{13})/6$

440. $0 \leqslant x < (3 - \sqrt{5})/6$

441. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

442. $x \geqslant \log_{3/2} \frac{1}{\sqrt{17}}$

443. $-1 \leqslant x < 7,\ x = -2$

444. $3/2 < x < 2,\ x > 2$

445. $-2 \leqslant x < -1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$

446. $x < -7,\ -5 < x \leqslant -3$, $x \geqslant 2$

447. $1 - \sqrt{3} \leqslant x \leqslant (3 - \sqrt{5})/2$, $2 < x < 5/2$

448. $x \leqslant 0,\ x \geqslant 7/8$

449. $3/4 < x \leqslant 7$

450. $x = 1, y = 3$

451. $2\pi + 7$

452. $x > 0$ при $a = 0$; $-4a/3 \leqslant x < -a,\ x > 0$ при $a > 0$; при $a < 0$ корней нет

453. $-1 \leqslant x < \left(\frac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1$ при $a < 1$; $x \geqslant -1$ при $1 \leqslant a < 2$; $x > \left(\frac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1$ при $a \geqslant 2$

454. $x = 0$ при $a = -5$; $0 \leqslant x \leqslant (a+5)^2$ при $-5 < a < 1$; $(a-1)^2 \leqslant x \leqslant (a+5)^2$ при $a \geqslant 1$; при $a < -5$ корней нет

455. $2 - 4\sqrt{2}/3$

456. $x = -2\frac{\pi}{3}$

457. $(-1)^k \arcsin \frac{1}{\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$

458. $x = \pm\frac{\pi}{6}; \pm\frac{\pi}{4}$

459. $x = \pm 1/6; \pm 11/6; \pm\sqrt{3}$

460. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n$, где $n = -1, 0, 1, 2$; $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}k$, где $k = 1, \ldots, 4, 6, \ldots, 9$

461. $x = 1\frac{23}{24}; 2\frac{7}{24}; 2\frac{23}{24}$

462. $x = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

463. $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

464. $x = \frac{\pi}{5}, \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

465. $x = \frac{(-1)^n\pi}{6} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$

466. $x = -\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

467. $x = \pi \pm \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

468. $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

469. $x = \pi n$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

470. $x = \pi n$, $-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

471. $x = \pi n$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

472. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

473. $-\frac{\pi}{3}$

474. $x = \pi - \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

475. $x = \pm\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n$, $\pm\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

476. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

477. $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

478. $x = 0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$

479. $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

480. $x = \pi + 2\pi n$, $\pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

481. $x = -\pi + 24\pi n$, $7\pi + 24\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

482. $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $\frac{17\pi}{12} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

483. $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

484. 17; внутри

485. $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{18}$

486. $\frac{625}{121}$

487. $\arccos\sqrt{\frac{11}{14}} - \arccos\frac{\sqrt{14}}{4}$

488. 1

489. $56\sqrt{2}$

490. $4r_1 + 2r_2$

491. 3/4

492. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}b - \frac{\sqrt{2}}{2}c$

493. $\frac{5\pi}{12}$

494. $\sqrt{61}$

495. $125\sqrt{6}$

496. $28\sqrt{3}$

497. 27; 189/25

498. $\frac{3(\sqrt{5}\pm 1)}{2}$

499. $\sqrt{53}$, $\sqrt{13}$

500. 1/3, 2/3

501. $\sqrt[5]{\frac{1990}{1992}}$

502. $\sqrt{11}$

503. 3

504. $3^{\log_2 5} + 10^{\frac{1}{3}\lg 2}$

505. $-1/\sqrt{10}$; $\sqrt{17}/13$

506. Сумма членов геометрической прогрессии

507. ACB

508. Два

509. $3/2 < x < 2$

510. -4, -1

511. $x = 2$

512. $0 < x < 3$, $25/8 < x < \sqrt{10}$

513. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

514. $x = 2\pi \pm$ $\pm \arccos \log_2(\sqrt{6} - 1)$

515. $x = 3\pi + \arccos \frac{10}{11}$

516. $x = 0$, $y = \log_2 \frac{8}{11}$; $x = \frac{1}{3}\log_2 \frac{3+\sqrt{8}}{2}$, $y = 2 + \log_2(3 - \sqrt{8})$

517. $a = 0$, $2 + \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{5}$

518. CD

519. $7\sqrt{29/5}$

520. $\frac{75}{2} - 9\pi$; S

521. $(\sqrt{2} + 1)/2 \approx 1{,}21$

522. $3\sqrt{3/19}$

523. $(4 - \sqrt{2})/6$

524. $49(3\sqrt{3} - 5)/3$

525. $-1 < x < 0$

526. Да

527. $-2 - \sqrt{4 + \cos\frac{3}{2}} \leqslant x < 0$

528. $\frac{4\pi}{9} \leqslant x < 8\sin\frac{\pi}{12}$, $x = \log_3 28$

529. $x = \log_{3/2} \frac{\sqrt{13}+1}{6}$

530. AL

531. 7

532. $5\sqrt{5}/3$

533. $x \leqslant -3$, $-1 < x < 1$, $x > 1$

534. $x = 2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6}$, где $n, k, m \in \mathbf{Z}$

535. $x = \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

536. $x = 4$

537. $x = -1$

538. $-1 \leqslant x \leqslant 0$

539. $1 < x \leqslant 2$

540. $x = 5/3$

541. $-1 < x < 0$, $0 < x < 2$

542. Корней нет

543. $a = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{18} + 2\pi k$, $\frac{13\pi}{18} + 2\pi m$, где $n, k, m \in \mathbf{Z}$

544. $x = \sqrt{3}/8$, 1

545. $x < -2$, $-2 < x < 2 - \sqrt{15}$, $x \geqslant 6$

546. $x > 1$

547. $\log_{72} 54 \leqslant x \leqslant \log_{\frac{9}{8}} \frac{3}{2}$

548. $x \leqslant -3, \;\; x = 5$

549. $x = 7 - 2\log_5 9$

550. $x < 0$

551. $-15/4 \leqslant x < -3/2,$
$-3/2 < x \leqslant 5/2$

552. $x = 2$

553. -10

554. $2 - \sqrt{2} < x \leqslant 1,$
$3 \leqslant x < 2 + \sqrt{2}$

555. $x = -\sqrt{5}$

556. $x = 1, y = -5;$
$x = 5, y = -1$

557. $x = 81, y = 0$

558. $x = 10, y = 15, z = 6$

559. $x = -14, y = -1$

560. $x = (3 + 2\sqrt{3})/2,$
$y = (3 - 2\sqrt{3})/2$

561. $x = 2, \; y = -1;$
$x = 12/7, \; y = -1/7$

562. $x = \pm 1/\sqrt{2}, \;\; y = \mp 1/\sqrt{2}$

563. $x = 9, \;\; y = 1$

564. $x = \frac{1}{2\log_2 3 - 1},$
$y = \frac{2}{2\log_2 3 - 1}$

565. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n + \frac{\pi}{2}k,$
$y = -\frac{\pi}{4} + \pi n - \frac{\pi}{2}k$, где
$n, k \in \mathbf{Z}$

566. $a = 1, \;\; -1/2,$
$(-7 \pm 4\sqrt{2})/2$

567. $a \neq 0, \;\; 1, \;\; -3/4$

568. $a = 2, \;\; b = 3$

569. 6, 3 и 1,5

570. 2 м^3

571. 60 и 100 км/ч

572. 15 и 3 км/ч

573. $\pm\sqrt{5/8}$

574. $x > \log_2 \frac{8}{5}$

575. $\frac{\pi}{4}n < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n,$
где $n = 0, 1, 2, 3$

576. $a = 50$

577. $6 - 2\sqrt{5} < a \leqslant 2\sqrt{5} - 2,$
$a = 4$

578. $x = 2, \;\; 3$

579. $x = \frac{\sqrt{7}-3}{2}, y = \frac{4-\sqrt{7}}{2};$
$x = \frac{\sqrt{19}-5}{2}, y = \frac{6-\sqrt{19}}{2}$

580. $x = -17/5, \;\; 11/3$

581. $x = 5/2, \;\; y = -5/2$

582. $x < -2 + 2\sqrt{3}, \;\; x > 2\sqrt{2}$

583. $-1/12 < x < 0,$
$1/12 < x < 6$

584. $-5 \leqslant x < 20$

585. $-4 < x < 1,$
$1 < x < 5/3, \;\; 5/3 < x < 11$

586. $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, где $\in \mathbf{Z}$

587. $x = 1 + \frac{\pi}{2} + \pi n,$
$\frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$, где $n = \pm 1,$
$k = -6, \; -2, \; -1, \; 0, \; 3, \; 4$

588. $[-3; 0]$

589. $3/4; -3/2$

591. $1 - 2\pi$

592. $\frac{10}{41 - 4\pi^2} + 1$

593. $12\pi - 1$

594. $1/2; -1/2$

595. $a = \pm\sqrt{2}$

596. $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

597. 18; -9

598. $10 - \sqrt{3}$; $-\left(1 + \sqrt{11 - \sqrt{3}}\right)^2$

599. $a = 2$

600. $a = -1/4$

601. $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$; $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$

602. $x = -6$, $y = -9$; $x = -5$, $y = -10$; $x = 10$, $y = 5$

603. $a = b = 0$; a — любое, $b = -a^2 - 1$

604. $-3 \leqslant a \leqslant 1$

605. $-5 < a < -\sqrt{24}$, $-\sqrt{24} < a < -3$

606. $-12/5 \leqslant a \leqslant 0$

607. 1) $-\sqrt{26} - 1 \leqslant a \leqslant \sqrt{26} + 1$; 2) $-\sqrt{26} + 1 \leqslant a \leqslant \sqrt{26} - 1$

608. $a < -10/3$, $-3 < a < -2$

609. $-1 \leqslant a < 2$

610. $a \leqslant -99$

611. $-3 \leqslant x < -2$, $x = 1$

612. $a = -1/3$, 2

613. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y = \pi - 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

614. $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} n$, где $n \in \mathbf{Z}$

615. $a = (1 - \sqrt{2})/2$

616. $a = \pm 2$, $b = \mp 2$; $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$; $a = -2\sqrt{2}$, $b = -\sqrt{2}$

617. $x = 1$ при $a = 1/3$; при остальных a корней нет

618. $x = (-5 \pm \sqrt{3})/2$ при $a = (1 \mp \sqrt{3})/2$; при остальных a корней нет

619. $x = 0$

620. $x = 1$

621. $a = -\frac{5\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{12}$

622. $a = 0$, 1

623. $x = -3/4$

624. $a = \frac{9\pi}{13}$, $\frac{15\pi}{13}$

625. $x = 0$, $y = \pm 1$

626. $x = 0$, -1 при $a = 0$; $x = 0$ при $a \neq 0$

627. $x = -\frac{\pi}{12}$, $2\pi - \frac{\pi}{12}$

628. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$, где $n \in \mathbf{Z}$

629. $x = 1/2$

630. $x = -1$, $y = \pm 2$

631. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(n + k)$, $y = \mp\frac{\pi}{3} + \pi(n - k)$; $x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} + \pi(m + l)$, $y = \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{6} + \pi(m - l)$, где $n, k, m, l \in \mathbf{Z}$

632. Не более 50 км/ч

633. Более 15 ч

634. $18\frac{1}{3}$ кг

635. 6 ч 30 мин

636. 1260 и 1100 руб

637. 156

638. $n = 300$, 600

639. $x = 100$

640. 15%

641. 9
642. 5
643. 20/9
644. 7/4
645. 27/8
646. 1/6
647. 3
648. 30°
649. $AB = BC = 7\sqrt{3}$,
$AD = 2\sqrt{21}$, $CD = \sqrt{21}$
650. 17/3
651. $\frac{2bc}{b+c}$
652. 4
653. 2, 2/3
654. $\frac{n}{m+n} \cdot \frac{V}{d}$
655. $V/8$
656. $15V/18$
657. 3
658. $3\sqrt{2}$
659. $\pi - \arcsin\frac{4}{5}$
660. $(3 \pm \sqrt{5})/2$ при $n = 2$;
1 при $n = 3$; при остальных
n треугольников нет
661. $\frac{3\sqrt{14}}{16}a^2$; одна
662. 22
663. $8\sqrt{6}$
664. $(3 - \sqrt{5})/4$
665. $\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{2\pi a-1}{\sqrt{2}}$
при $0 < a < \frac{1}{\pi}$
666. 1) $\pi\sqrt{\frac{3-a}{5+a}}$;
2) $0 < a < \pi\sqrt{\frac{3}{5}}$;
3) $0 < a \leqslant 1$
667. $\sqrt{a^2 + b^2}$
668. $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$
669. $d^2 \sin 2\alpha/2$
670. ab
671. $9\sqrt{2}$
672. 22
673. $4\sqrt{3}$
674. $Sd/3$
675. $\frac{\pi}{8}$
676. $x = -1$, 4
677. $x = 3$, $4 \leqslant x \leqslant 7$
678. $x = 1/2$
679. $6 \leqslant x < 4^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} + 5$
680. $-1/3 < x < -1/8$
681. $x = 1 - \sqrt{a^2 - 2a + 5}$,
$1 + \sqrt{a^2 + 4a + 8}$ при $a < -2$;
$x = 1 - \sqrt{a^2 - 2a + 5}$,
$1 - \sqrt{a^2 + 4a + 8}$ при
$-2 \leqslant a < -1/2$, $-1/2 < a \leqslant 1$;
$x = -3/2$ при $a = -1/2$;
$x = 1 + \sqrt{a^2 - 2a + 5}$,
$1 - \sqrt{a^2 + 4a + 8}$ при $a > 1$
682. $\frac{27-4\sqrt{66}}{9} \leqslant x \leqslant \frac{8-\sqrt{85}}{3}$,
$\frac{17+\sqrt{349}}{6} \leqslant x \leqslant \frac{27+4\sqrt{66}}{9}$
683. $x = \pm\arccos(-\frac{1}{3}) + 2\pi n$,
где $n \in \mathbf{Z}$
684. $2 < x < 5/2$,
$5/2 < x < 3$
685. $x = 6/11$, $y = 10/11$
686. $x = 2$, 1/8
687. $x = 2$
688. $a \geqslant 2/3$

689. $-7/16$

690. $x = y = -2$

691. $x = 3,\ y = \sqrt{2}$;
$x = \sqrt{2},\ y = 3$

692. $-9/10$

693. $1,\ 10/9$

694. $x = 9$

695. $x = 3/2,\ 36/25$

696. $x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$,
где $n \in \mathbf{Z}$

697. $x = \pm\frac{11\pi}{12} + 2\pi n$,
где $n \in \mathbf{Z}$

698. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$,
$\pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

699. $x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\frac{\pi}{12}$

700. 4

701. $x = 6,\ y = \pm 1,\ z = 0$;
$x = 0,\ y = \pm 1,\ z = 0$

702. $x = 15n^2 - 6n,\ y = 3n - 1$,
где $n \in \mathbf{Z}$

703. 648

704. 160

705. 6

706. 864

707. 13 и 11

708. Да

709. 500

710. От 25% до 40%
включительно

711. $2\sqrt{17}$

712. Да

713. $x = 0,\ y = -2\pi$;
$x = \pm\pi,\ y = -\pi$

714. $x = 3,\ 18$

715. $x = 0,\ 1$ при $a = 0$;
$x = \frac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$ при
$0 < |a| < \frac{2}{\sqrt{3}}$;
$x = \frac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$,
$\frac{-1-a-\sqrt{3a^2-3}}{2}$ при $|a| \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$

716. 573

717. $7/23$

718. $a = -17/48$

719. $-1/3 \leqslant a \leqslant 1/3$

720. $-3 \leqslant a \leqslant 3$

721. $a \geqslant 17$

722. $(11 - \sqrt{77})/2 \leqslant a < 2$,
$9 < a \leqslant (11 + \sqrt{77})/2$

723. $x = -1/3$

724. $x = 0,\ \pm\frac{\sqrt{5}}{2}a$

725. $x \leqslant 3$ при $a = 0$;
$x \leqslant \frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}$, $x \geqslant \frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}$
при $0 < a < \frac{1}{12}$;
x — любое при $a \geqslant \frac{1}{12}$

726. $-1/20 \leqslant a \leqslant 0$

727. $3 - \sqrt{6} \leqslant x \leqslant 2$,
$5 \leqslant x \leqslant 3 + \sqrt{6}$

728. $a = -4$

729. $-1 \leqslant a \leqslant -1/5$

730. $a < 1/2$

731. $\frac{1}{1+\cos\frac{2}{3}} < a \leqslant 1$

732. $x = -\sqrt{7/5}$

733. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$,
где $n \in \mathbf{Z}$

734. $\frac{1}{2}(a+b-$
$-\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 2\varphi})$

735. $\sqrt{6}+1;\ 2\sqrt{10}$

736. 121,5

737. $\frac{30\sin\varphi}{4+\cos\varphi}$

738. $7\sqrt{2}$

739. $30°$

740. $\frac{a+b(1-\cos\varphi)}{2}\pm$
$\pm\frac{\sqrt{a^2+2ab(b-\cos\varphi)-b^2\sin^2\varphi}}{2}$

741. $\sqrt{87}/4$

742. $7/\sqrt{65}$; $78/5$

743. 2, 14

744. 20

745. $\sqrt{13/19}$

746. $\arccos\frac{3\sqrt{7}}{8}$

747. $12/5$

748. $\arccos\frac{5}{8}$

749. $\arccos\frac{46}{\sqrt{2641}}$

750. $\frac{\pi}{2}-$
$-\arccos\left(\cos\alpha-\frac{1-\cos\beta}{\cos\alpha}\right)$

751. $-1\leqslant a\leqslant 1$

752. $a=-1,\ \sqrt{2}$

753. $a=-5,\ -5/13$

754. $a=-1,\ 1<a<3,$
$4<a\leqslant 6$

755. $a=4,5,\ldots,\ b=-2;$
$a=3,4,\ldots,\ b=-1$

756. $a\geqslant 0$

757. 40 мин и 1 ч

758. 10

759. 4; $3/2$

760. Ни одного

761. $-1/2<x<0$

763. $x=-3/2+4n,$
$-1/2+4k$, где $n,k\in\mathbf{Z}$

764. $a=-2\pm\sqrt{3}$

765. $a\leqslant-2,\ -1/2\leqslant a\leqslant 0$

766. $\sqrt{2}/2<a<1,$
$\sqrt{2}<a<2$

767. $x<-1,$
$(7-\sqrt{5})/2<x<3,$
$4<x<(7+\sqrt{5})/2,\ x>8$

768. $x=(-3+\sqrt{17})/2$

769. $x=(11-\sqrt{29})/2,$
$(3+\sqrt{13})/2$

770. $-5+\sqrt{23}\leqslant x\leqslant-1/8,$
$3/8\leqslant x\leqslant 3-\sqrt{5},\ x\geqslant 3+\sqrt{5}$

771. $-3/4;\ -3$

772. $x=\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\pi}{28},\ \frac{8\pi}{21}+\frac{\pi}{28}$

773. $x=\pi n,\ \frac{(-1)^k\pi}{6}+\pi k,$
где $n,k=0,\pm1,\ 2$

774. $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{8}+\pi n,$
$(-1)^k\arcsin\frac{5}{8}+\pi k,$
$(-1)^m\arcsin\frac{7}{8}+\pi m,$
где $n,k,m\in\mathbf{Z}$

775. $-13\leqslant x<-4\pi,$
$-4\pi<x<-\frac{11\pi}{3},$
$-\frac{7\pi}{3}<x<-2\pi,$
$-2\pi<x<-\frac{5\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3}<x\leqslant 1$

776. 3 при $|a|>1,\ a=0;$
5 при $a=\pm1;$
7 при $0<|a|<1$

777. $-\frac{\pi}{2}<a<-\frac{\pi}{3},$
$-\frac{\pi}{3}<a<-\frac{\pi}{4},\ a=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$

778. $-\frac{70\pi}{3}$

779. $a = -\sqrt{3}/2$

780. 0 при $a < 0$, $a > 1$;
3 при $a = 0$;
4 при $0 < a < 1$;
2 при $a = 1$

781. $a = 2,\ 10/3$

782. 1) $a = -8$;
2) $-8 < a < -4\sqrt{3}$

783. 1) таких a нет;
2) $a < -8$, $a > 0$

784. $-8 < a < 0$

785. $-13/4 < a < 3$

786. $x < (\sqrt{5} - 1)/2$, $x > 1$

787. $x \leqslant -1 - \sqrt{3}$,
$-1 + \sqrt{3} \leqslant x < (7 + \sqrt{22})/3$

788. $a = -\sqrt{2}$, $-1 < a < 1$

789. $2 \leqslant a < 3$, $3 < a \leqslant 4$

790. $a = 4$;
$-3 - \sqrt{45} < b < 3 - \sqrt{45}$,
$-3 + \sqrt{45} < b < 3 + \sqrt{45}$

791. $a \leqslant -3/2$, $a > 1/3$

792. $a \leqslant 0$, $a \geqslant 3$

793. $-\sqrt{2} < a < -16/17$,
$0 < a < \sqrt{2}$

794. $1 \leqslant a < 2$, $2 < a < 3$

795. $a = -4$,
$-5/2 \leqslant a \leqslant -9/4$

796. $a < (-3 - \sqrt{5})/16$

797. $5 < a < 7$

798. 1) $1 < a \leqslant (2 + \sqrt{13})/4$;
2) $b = 7/3$

799. $x < -1$, $-1 < x < 0$,
$x > 2$

800. $a \leqslant -3/2$

801. $-\sqrt{2} \leqslant a < 1$; $a \geqslant \sqrt{2}$

802. $p = -6$, $q = 7$

803. $a < -2 - \sqrt{6}$, $a > \sqrt{2}$

804. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ 2\pi k$,
где $n, k \in \mathbf{Z}$, при $a = -1$;
$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$,
при $a = 0$;
$x = \pm \arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2\pi n$,
где $n \in \mathbf{Z}$, при $a = 1$;
при остальных a корней нет

805. $a = 0,\ 2,\ (3 + \sqrt{5})/2$

806. Два

807. $a < 1/2$, $a > 3/2$

808. $-\sqrt[3]{36} < a \leqslant -3$,
$0 < a < \sqrt[3]{9}/2$

809. $-7/2 \leqslant x \leqslant 15/2$

810. $x = -1$, $y = -3$;
$x = 1$, $y = -1$

811. $1 \leqslant a \leqslant 3$

812. $a = \pm 9$

813. $a = 6$, $b = 2$;
$a = -2$, $b = -6$

814. $-a^2/2$ при $0 < a \leqslant 2 - \sqrt{2}$;
$1 - 2a$ при $2 - \sqrt{2} < a < 1$

815. $x = \frac{217 - 5\sqrt{415}}{29}$,
$y = \frac{180 + 2\sqrt{415}}{29}$

816. $\sqrt{32/3}$

817. $x = 4/\sqrt{13}$,
$y = t = 6/\sqrt{13}$, $z = 9/\sqrt{13}$

818. 2

819. 5 ч 30 мин

820. 14 и 19

821. $4\sqrt{3} + 10\pi$

822. 3 и 5

823. $\frac{3}{4}ab$

824. 4 : 5

825. 3 : 5

826. $2\sqrt{6}$

827. 24/7

828. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$

829. $\sqrt{\frac{8(1-\cos\alpha)}{1+2\cos\alpha}}$

830. $\sqrt{5}$

831. 4

832. 10 : 3

833. 3 : 29

834. 4

835. 5 : 8

836. $\arccos\sqrt{2(1-s)}$

837. 9 : 95

838. 7 : 20

839. 213 : 67

840. 3

841. 1) 7 : 20; 2) $9ds : 4$

842. 40

843. $\frac{1}{2}(1 + 2\cos 2\alpha)^2 \operatorname{tg} 2\alpha$

844. 9; 45

845. $8r^3/a$

846. 27/4

847. 4/3

848. $(21 - \sqrt{357})/4$

849. $2\arcsin(\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta})$

850. $2\sqrt{6}/3$

851. 5/9

852. $x = \sqrt{3}$

853. 70

854. 20

855. 2

856. 12

857. 45

858. 60 км/ч

859. $-4/3$

860. $a < 0$

861. $x = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

862. $\pm 1/\sqrt{10}$

863. $x = y = 0$; $x = 5$, $y = 1$; $x = -10/3$, $y = 2/3$

864. $x = 2$, $y = 1$

865. $x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi}{5}n$, $y = 1$, где $n \in \mathbf{Z}$

866. $x = 1$, $y = 0$ при $a = -4$; $x = -3$, $y = 0$ при $a = 4$; при остальных a решений нет

867. $x = 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

868. $x < 0$

869. $x = 3$

870. $-2\sqrt{6}/3 < a < 2\sqrt{6}/3$

871. $x = -1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$

872. $x = 1/4$

873. $x = 1,\ y = -\frac{\pi}{2}$
874. $x = y = z = 3$
875. 6
876. 4
877. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$
где $n \in \mathbf{Z}$
878. $x = 1$
879. $1/3 < x \leqslant 2/3$
880. $2 < x < 3,\ 3 < y < 4$
881. $4 \leqslant x < 13/2$
882. $-2 < x \leqslant -3/2,\quad x = -1$
883. $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$
где $n \in \mathbf{Z}$
884. $\frac{-5-2\sqrt{3}}{26} \leqslant x \leqslant 0$
885. $9/16 < x < 15$
886. $x < -1 - \sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{2} + 1},$
$x > -1 + \sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{2} + 1}$
887. $x = -1,\ 3;\quad y = -3$
888. $10 + 2\sqrt{5}$
889. $x = 1,\ y = -1$
890. $x = 4,\ y = -3,\ z = 0;$
$x = 2,\ y = -1,\ z = 2$
891. $a = 1/9$
892. $x = 1/2 - \log_3 2,$
$y = 2\log_3 2$
893. $x = -1$
894. $a < -1$
895. $a = 2,\ b = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где
$n \in \mathbf{Z};\quad a = -2,\ b$ — любое
896. $a = 0,\ \pi,\ 2\pi$
897. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ при
$a = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
при $a = -5\pi/6 + 2\pi k;$
где $n, k \in \mathbf{Z}$
898. $x = -7/4,\ 1/4$
899. Нет
900. 4 и 3 км/ч
901. 12 ч
902. Нет
903. $x = 0$
904. $a = 2/5$
905. $x = y = 0$
906. Нет
907. A
908. На диагонали
909. Нет
910. $a = 0,\ 1;\ b = 0$
911. $0 \leqslant a < 1$
912. $a = -1$
913. $a \leqslant 0$
914. $a = 1/2,\ 1$
915. $a = 0,\ 2\sin 1$
916. $a = 3/2$
917. $a = -1,\ 2$
918. $a = -1/4$
919. $a = 1$
920. $a = 1/16,\ 1/128$
921. $a = 2/3$
922. $0 < x \leqslant \sqrt{35}$
923. $a = 1$
924. $a = 2,\ 3$
925. $a = 3, 4, \ldots$
926. $\sqrt{161}/9$
927. $x = -1,\ 3$

928. $x = y = 0$; $x = y = 2$;
$x = 0$, $y = 3$; $x = 3$, $y = 0$
929. $x = 5$, $y = z = 4$
930. 8
931. 24 и 7
932. 70
933. 132
934. $x = -2$, $y = 0$;
$x = 0$, $y = -2$; $x = -3$, $y = 0$;
$x = -1$, $y = 2$
935. $x = 2$, $y = \pm 3$;
$x = -2$, $y = \pm 3$
936. $x = -31, \ -7$
937. 6 и 25
938. 144
939. 375 и 125 руб
940. 1 г
941. 11
942. 33
943. Один 16-квартирный и одиннадцать 12-квартирных
944. 20
945. 3
946. $a + p$
947. $7/(3\sqrt{3})$
948. $6\sqrt{6} + 3$
949. 120°
951. $\frac{abc}{amn+bln+clm}$
952. 195
953. $\frac{9(3\sqrt{10}-8)}{10}$
954. $\sqrt{ab}$
955. $\sqrt{11}$
956. 8
957. $\frac{3}{4}(4\sqrt{2} - 5)$
958. 1
959. $4/\sqrt{17}$
960. $\sqrt{30}/5$
961. $\frac{\sqrt{2}\,a^3(b+2)}{6\sqrt{b}(b+1)}$
962. $\sqrt{6}$
963. 25
964. 2
965. $\sqrt{a(a+b)}$
966. $\sqrt{3}$
967. 1) 1; 2) $a - 1$
968. 1; 4
969. $2rR/(R-r)$
970. $3/32$
971. 1
972. 9
973. 1
974. $27 : 10$
975. $n : m$
976. $12/5$
977. 45°
978. 18
979. $2\sqrt{3}$
980. 8
981. 52
982. $3\sqrt{3}/4$
983. AB; в любом отношении от 0 до $1/56$, считая от точки A
984. $1 : 3$
985. 12
986. $5\sqrt{2}$

987. $\sqrt{133}$

988. $\frac{r^2(2R+\sqrt{3Rr+r^2})^2}{4(R-r)^2}$

989. $\frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}$

990. $5/2,\ 5/3$

991. $21:23$

992. $\frac{4}{7}\sqrt{14}R$

993. $5,\ 16/3$

994. 9

995. $\frac{15\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{8}{11\sqrt{3}+\sqrt{43}}\right)$

996. $\frac{s}{4}+\frac{S\sqrt{2-2b}}{4a}$

997. $3\sqrt{183}/2$

998. $\sqrt{8}-\sqrt{5}$

999. $25:47$

1000. $\frac{r}{\sin\alpha}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\alpha-1\right)$

1001. 1960

1002. 7200

1003. $-63/4,\ -23/8$

1004. $x=(-1)^n\frac{\pi}{18}-\frac{\pi}{33}+\frac{\pi}{3}n$, где $n\in\mathbf{Z}$

1005. $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$

1006. $x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}$, $\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$

1007. $x=2,\ e^2$

1008. $54;\ -135$

1009. $x_{\max}=1/3$

1010. 1

1011. $(0;1)$, $(1;e]$ — промежутки убывания; $[e;\infty)$ — промежуток возрастания; $x_{\min}=e$

1012. $-5/e$

1013. 1

1014. $3\sqrt{3}$

1015. $-\frac{4\pi}{3}+4\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$

1016. $4\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$; $-4\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$

1017. $-\frac{1}{3}\arcsin\frac{2}{\sqrt{29}}+\frac{2\pi}{3}n$, где $n\in\mathbf{Z}$

1018. $2/3;\ 21$

1019. $21+3\ln 2;\ 0$

1020. -118

1021. $1/10$

1022. $-\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}$ при $a<-1$, $-1/6$ при $-1\leqslant a<0$

1023. $a<-2-\sqrt{5}$, $a>\sqrt{5}$

1024. $a=\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{31}-7}{5}$, $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{31}-7}{5}$

1026. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}n,\ \pi k$, где $n,k\in\mathbf{Z}$

1027. $9/2$

1028. $0,\ 8$

1029. $x=3$

1030. 2

1031. $\frac{a}{4}\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)^2$; $\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\times$ $\times\left(1+\frac{a}{2}+\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}\right)$

1032. $25/4$

1033. $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}\right)$

1034. 6

1035. $y=-x+5/2$

1036. $y=\pm\sqrt{2}x+\sqrt{2}$

1037. $x=1$

1038. $x = \sqrt{2\pi}$, $\frac{-1+\sqrt{8\pi+1}}{2}$
1039. $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = 2$
1040. 64/3
1041. 9/2
1042. 9
1043. 9/4
1044. $2\sqrt{2} - 2$
1045. 9/4
1046. 9/4
1047. $a = \frac{16}{9b^2} - 1$ при $0 < b < \frac{4}{3}$
1048. $a = 1$
1049. $(1/2; 1/2)$
1050. $4/\sqrt{3}$
1051. $x = 1$
1052. $(0; 2)$
1053. $a = 3/5$
1054. $a = 4/5$
1055. $a = \sqrt[4]{3}$
1056. $a \geqslant -1/3$
1057. $0 < a < 1/54$
1058. $a < -\frac{3\pi}{2} - \frac{5}{9}$
1059. $0 \leqslant AB \leqslant 16\sqrt{3}$ (км)
1060. $2R\sin\frac{2\pi}{9}$
1061. 4
1062. $4\sqrt{3}$
1063. $\frac{8}{3}\pi r^3$; $4r$
1064. $4R/3$; $2\sqrt{2}R/3$
1065. $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{3+\sqrt{17}}{4}$
1066. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$
1067. $x = 0$
1068. 1/18
1069. 50°
1070. $-1 - \sqrt{2}/2 \leqslant a \leqslant -1$; $a = -2,\ 0,\ 1,\ \sqrt{2}/2$
1071. $\sqrt{21}/2$
1072. $x = -\sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$
1073. 1/4
1074. $4 \leqslant x \leqslant 5$
1075. 20
1076. $a \leqslant -3$, $a = 1$, $a > 3$
1077. 88
1078. $x \leqslant -11/6$, $x = 0$
1079. $x = -3$
1080. $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$
1081. 1) 1 : 1, 5 : 9; 2) 5 : 21
1082. $a \leqslant 3$, $a \geqslant 4$
1083. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{5}}$
1084. 5 км
1085. $x = 3$, $x \geqslant 8$
1086. $x = \frac{23\pi}{36} + \pi n$, $\frac{35\pi}{36} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$
1087. $(31 + \sqrt{129})/2$
1088. $1 \leqslant a < 2$, $2 < a \leqslant 3$
1089. $\frac{1}{6}V - \frac{2}{3}V^3R^2 \times$
$\times \left(\left(\frac{a^2-4R^2}{2}\right)^2 - 2aV\right)^{-2}$
1090. $\frac{19\pi}{24}$
1091. $\frac{2\pi}{3} + 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
1092. $-1 < x \leqslant \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $0 < x \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x \geqslant \frac{1+\sqrt{13}}{2}$
1093. $2\sqrt{3\sqrt{2} - 4}$

1094. $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$ где $n, k \in \mathbf{Z}$

1095. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

1096. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n,$ $\frac{(-1)^k\pi}{60} + \frac{\pi}{10}k,$ где $n, k \in \mathbf{Z}$

1097. $x = 3$

1098. $5 < x < 2 + \sqrt{17}$

1099. $(7 - 3\sqrt{3}) : 11$

1100. $x = 1,\ y = 1/3$

1101. $c\left(\frac{a}{b}\right)^2$

1102. $x = -a - 3$ при $0 < a < 1,\ 1 < a \leqslant 3;$ $x = a,\ -a - 3$ при $a > 3;$ при остальных a корней нет

1103. $8a\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\operatorname{arctg}\cos\varphi$

1104. $x = \pi n,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,$ где $n, k \in \mathbf{Z}$

1105. $x = (3 + \sqrt{65})/2$

1106. $-1 < x < 0$

1107. $5 : 2$

1108. $x = 1,\ y = 3$

1109. $\frac{b(2a+b)}{a+b}$

1110. $a = -2,\ 1$

1111. $\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}a$

1112. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,$ $\pm\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}k,$ где $n, k \in \mathbf{Z}$

1113. $x < 3,\ \ x > 21/5$

1114. $\sqrt{2}$

1115. $x = \log_2 3,\ y = \log_3 2$

1116. $x = \sqrt{5}$

1117. $\sqrt{a^2 - bc}$

1118. $\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4} = 2\arccos\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{8}}$

1119. 1) $-3^a < x < -1,$ $1 < x < 3^a$ при $0 < a < 1/2;$ $x < -3^a,\ x > 3^a$ при $a > 1/2;$ при остальных a корней нет; 2) $a = 1$

1120. $x = 1$

1121. $0 < x < 1/5,$ $1/5 < x < 1,\ 1 < x \leqslant 2$

1122. $x = \frac{\pi}{12},\ \frac{11\pi}{12}$

1123. $4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}$

1124. $1 : 2\pi$

1125. $x > 2$ при $a = -1;$ $1 < x \leqslant a + 2,\ x > 1 - a$ при $-1 < a < -1/2;$ $1 < x < 3/2,$ $x > 3/2$ при $a = -1/2;$ $1 < x < 1 - a,\ x \geqslant a + 2$ при $-1/2 < a < 0;$ $x \geqslant 2$ при $a = 0$

1126. 3997

1127. $x = (-1)^n\arcsin\frac{4\sqrt{3}}{7} + \pi n,$ где $n \in \mathbf{Z}$

1128. $x = 3,\ y = 1/9$

1129. 6 км/ч

1130. $50\pi(2 + \sqrt{2});\ S$

1131. $m = -6,\ -5,\ -4$

1132. $x \leqslant -2,\ -1 < x < 0,$ $x > 0$

1133. $x = -5,\ -6,\ -\frac{7\pi}{4}$

1134. $-1/3 < x < 0$, $0 < x < 2$, $2 < x < 3$

1135. $\sqrt{6}$

1136. 24

1137. $a = \pm 1$

1138. $2^{1001} - 4$

1139. $x = \frac{(-1)^n}{3} \arcsin \frac{\sqrt{29}-3}{8} + \frac{\pi}{3}n$, где $n \in \mathbf{Z}$

1140. $x \leqslant -2$, $1/2 \leqslant x < 1$, $1 < x \leqslant (\sqrt{73} - 3)/4$

1141. $x = 1$

1142. 22/7

1143. $5/6 \leqslant y < 1$, $1 < y \leqslant 3/2$

1144. $5 : 7$

1145. $\sin \frac{43\pi}{6} \operatorname{tg}^3 \left(-\frac{8\pi}{3}\right) \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3}$

1146. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

1147. $2 - \log_2^2 3 < x \leqslant 2$

1148. 0

1149. 1/6

1150. $a = 9/16$

1151. $x = \log_3 44$

1152. $x = \frac{(-1)^n \pi}{6} + \pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

1153. $x = \pm 1$

1154. $x < 0$

1155. 0,5

1156. $\sqrt{6}/12$

1157. $x \leqslant -2$, $x \geqslant 2$ при $a \geqslant 1$; $x \leqslant -2$, $2 \leqslant x \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}$ при $0 \leqslant a < 1$

1158. $x = \pm \arcsin \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

1159. $x = 1$, $y = 0$; $x = 1$, $y = -4/5$; $x = -7$, $y = 28/5$

1160. $-\sqrt{2}$

1161. 74

1162. $-1/6 < x \leqslant (\sqrt{2} - 2)/6$, $(\sqrt{2} - 16)/48 \leqslant x < -7/24$

1163. $2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

1164. $x = 3$

1165. $4\sqrt{19}$

1166. $-3 < x \leqslant -2$, $x = 0$

1167. -2; $-1,999$

1168. $\frac{3}{4}(\pi + 2)$

1169. 90°, 10°, 80°

1170. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

1171. 6; 66

1172. 512

1173. $8 \leqslant x < 4 + 2\sqrt{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$

1174. $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$, где $n \in \mathbf{Z}$

1175. 231

1176. $x = -9, -8, -6, -5$

1177. 1) 60° ; 2) $2/\sqrt{3}$

1178. $-2 \leqslant a < 1$, $1 < a \leqslant 4$

1179. $\frac{9}{4}\sqrt{551}$; 15/2

1180. $x = 25$

1181. $x = 2 + \sqrt{3}$

1182. $9 : 7$

1183. $a = \pm 1/6$, $\pm\sqrt{2}/6$

1184. 3/2

1185. $50\sqrt{2}$

1186. 2/3

1187. $x < -9$, $2/3 < x < 1$, $x \geqslant 11/2$

1188. 15

1189. $x = \pi + \arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$

1190. $x = -\frac{\pi}{12} + \pi n$, $y = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{6}n + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

1191. $-3 < x < -2$, $3 < x \leqslant 4$

1192. $0 < x \leqslant 3$

1193. 24

1194. $\frac{42\sqrt{51}}{25}a^2$

1195. $x = -\frac{\pi}{26}, \frac{\pi}{34}$

1196. $\frac{d^3}{3}\sin\frac{\alpha}{2} \times \sqrt{\sin^2 2\beta - \sin^2\frac{\alpha}{2}}$

1197. $x = \frac{1}{\sqrt[8]{5}}$, $y = z = 0$ при $a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $x = \frac{1}{\sqrt[8]{5}}$, $y = 1$, $z = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{1}{\sqrt[8]{5}}$, $y = -1$, $z = -\frac{\pi}{4}$ при $a = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{8}}$

1198. $-3 \leqslant x < -17/7$, $-17/7 < x \leqslant -7/3$

1199. $x = 3$

1200. $\frac{a^2}{4}(3 + \sqrt{3})$

1201. $x = \pm\frac{\pi}{14}$

1202. 72

1203. $x = \frac{1}{\sqrt[8]{8}}$, $y = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ при $a = -\frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{\sqrt[8]{8}}$, $y = \frac{\pi}{4} + \pi n$ при $a = \frac{1}{2}$; при остальных a корней нет

1204. $4/7 < x < (37 + \sqrt{69})/50$

1205. $x = 7^{\log_2 \frac{\sqrt{41}-5}{2}}$

1206. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y = \frac{(-1)^k\pi}{4} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $y = \frac{(-1)^k\pi}{3} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

1207. $a = 9$; $[-1; 3]$

1208. $1820\sqrt{21}/341$

1209. $5/11 < a \leqslant 6/13$

1210. $x = (13 - \sqrt{21})/2$

1211. $-1/5$; 1, 4

1212. 1) 5/2; 2) 234/25

1213. Сначала в газете, а затем в любом порядке 2 раза по радио и 1 раз по телевидению

1214. $x < -4$, $x = 0$, 2, $x > 4$

1215. $a \leqslant 1$, $a = 0$, $a > 2$

1216. $x = 1/3$, $2(1 - \sqrt{2})/3$

1217. $x = \frac{\pi}{4}n$, $(-1)^k \arcsin\frac{5-\sqrt{57}}{8} + \pi k$, где $n, k \in \mathbf{Z}$

1218. 0

1219. $\frac{9\sqrt{3}}{16}\operatorname{tg}70^\circ$

1220. $x < -7$, $\sqrt{3} \leqslant x < 3$

1221. $6 - 2\sqrt{6}$

1222. $x = 1$, $y = 3$

Оглавление